198. Es ist für $|z| < 1$

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^3)(1-z^5)\cdots} = (1+z)(1+z^2)(1+z^3)\cdots$$

199. Mit Hilfe des sin-Produktes bzw. der ctg-Partialbruchzerlegung lassen sich die folgenden Reihen und Produkte geschlossen auswerten, in denen x und y reell sein sollen und das Symbol $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$ die Summe der beiden Reihen $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n)$ und $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(-k)$ bedeuten soll:

a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2+y^2}$, b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4+x^4}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^3}$, d) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1-\frac{4x^2}{(n+x)^2}\right)$.

XIII. Kapitel.

Divergente Reihen.

§ 59. Allgemeine Bemerkungen über divergente Zahlenfolgen und die Verfahren zu ihrer Limitierung.

Die Auffassung von dem Wesen unendlicher Zahlenfolgen, wie wir sie in allem Vorangehenden, so vor allem in §§ 8—11, dargelegt haben, ist vergleichsweise neuen Datums; denn ein strenger und einwandfreier Aufbau der Theorie war erst möglich, nachdem der Begriff der reellen Zahl geklärt war. Aber selbst wenn man es gelten läßt, daß dieser Begriff und mit ihm irgendein allgemeines Konvergenzkriterium für Zahlenfolgen, etwa unser 2. Hauptkriterium, als von fast axiomatischer Natur ohne Beweis einfach anerkannt wird, so ist immer noch die Konvergenztheorie der unendlichen Zahlenfolgen, insbesondere der unendlichen Reihen, viel jüngeren Datums als ihr ausgiebiger Gebrauch und als die Entdeckung ihrer schönsten Resultate etwa durch Euler und seine Zeitgenossen, oder gar schon durch Leibniz, Newton und deren Zeitgenossen. Diesen boten sich die unendlichen Reihen in der natürlichsten Weise als Rechnungsergebnisse dar, drängten sich ihnen sozusagen auf, wie z. B. die geometrische Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ als nicht abbrechendes Divisionsergebnis von $1 : (1 - x)$, die Taylorsche Reihe und mit ihr fast alle Reihen des VI. Kapitels durch das Prinzip der Koeffizientenvergleichung oder aus geometrischen Erwägungen heraus. In ähnlicher Weise stellten sich auch die unendlichen Produkte, Kettenbrüche und alle sonstigen Näherungsverfahren ein. Es wurde also nicht, wie wir es in unserer Darstellung getan haben, *das Symbol der unendlichen Zahlenfolgen geschaffen* und nun mit ihm gearbeitet, sondern diese *waren da*, und es galt sich mit ihnen auseinanderzusetzen.

Daher lagen Konvergenzfragen im heutigen Sinn diesen Mathematikern zunächst noch ganz fern[1]. Und so ist es nicht zu verwundern, daß z. B. EULER die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

auch für $x = -1$ oder $x = -2$ noch gelten läßt und also unbedenklich[2]

$$1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots = \tfrac{1}{2}$$

oder

$$1 - 2 + 2^2 - 2^3 + - \cdots = \tfrac{1}{3}$$

setzt, und entsprechend etwa aus $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$ die Gleichung

$$1 - 2 + 3 - 4 + - \cdots = \tfrac{1}{4}$$

herleitet und vieles andere mehr. Freilich hielt die meisten Mathematiker jener Zeiten eine instinktive Scheu von solchen Ergebnissen ab und ließ sie nur solche Resultate anerkennen, die auch in unserm heutigen Sinn richtig sind[3]. Aber eine klare Einsicht in die Gründe, warum das eine Ergebnis anerkannt wurde, das andere nicht, fehlte ihnen damals noch.

Es ist hier nicht der Raum, auf die sehr lehrreichen Auseinandersetzungen zwischen den Mathematikern des 17. und 18. Jahrhunderts über diesen Punkt einzugehen[4]. Wir müssen uns damit begnügen, etwa bezüglich der unendlichen Reihen festzustellen, daß EULER sie stets dann gelten ließ, wenn sie sich auf natürliche Weise durch Entwicklung eines analytischen Ausdrucks einstellten, der seinerseits einen bestimmten Wert besaß[5]. Dieser letztere wurde dann in jedem Falle als Summe der Reihe angesehen.

---

[1] Vgl. die Bemerkungen am Anfang des § 41.

[2] Diese Gleichung tritt schon bei JAK. BERNOULLI (Posit. arithm., 3. Teil, Basel 1696) auf und wird von ihm als „paradoxon non inelegans" bezeichnet. Näheres über die heftige Fehde, die sich hieran anschloß, findet man in dem unter **69**, 8 genannten Buche von R. REIFF.

[3] So sagt D'ALEMBERT (Opusc. Mathem. t. 5, 1768, 35. Mémoire, p. 183): „Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements et les calculs fondés sur des séries qui ne sont pas convergentes ou qu'on peut supposer ne pas l'être, me paraîtront toujours très suspects".

[4] Näheres in R. REIFF: a. a. O.

[5] In einem Briefe an GOLDBACH (7. VIII. 1745) sagt er geradezu: „. . . so habe ich diese neue Definition von der Summe einer jeglichen seriei gegeben: Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur."

Es ist klar, daß diese Übereinkunft keine strenge Grundlage hat. Wenn z. B. die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots$ auch in der einfachsten Weise aus der Division von $1 : (1 - x)$ für $x = -1$ entsteht (s. o.) und also $= \frac{1}{2}$ zu setzen wäre, so ist doch nicht einzusehen, warum nicht *dieselbe* Reihe auch aus ganz andern analytischen Ausdrücken sollte entstehen können und auf Grund solcher anderweitigen Entstehung nun auch einen andern Wert erhalten müßte. In der Tat entsteht die obige Reihe auch aus der Funktion $f(x)$, die für $x > 0$ durch die DIRICHLETsche Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + - \cdots$$

dargestellt wird, für $x = 0$, oder aus

$$\frac{1 + x}{1 + x + x^2} = \frac{1 - x^2}{1 - x^3} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + - \cdots$$

für $x = 1$. Auf Grund der letzteren Entstehung müßte $1 - 1 + \cdots = \frac{2}{3}$ gesetzt werden, und bei der andern ist nicht ohne weiteres zu sehen, was $f(0)$ für einen Wert haben mag. Er *könnte* jedenfalls von $+\frac{1}{2}$ verschieden sein.

Das EULERsche Prinzip ist also jedenfalls unsicher, und nur der ungewöhnliche Instinkt EULERS für das mathematisch Richtige hat ihn trotz der ausgiebigen Benutzung solcher divergenten Reihen im allgemeinen davor bewahrt, falsche Ergebnisse zu zeitigen[1]. Erst CAUCHY und ABEL klärten den Konvergenzbegriff und verwarfen alle nicht konvergenten Reihen; CAUCHY in seiner *Analyse algébrique* (1821), ABEL in seiner Arbeit über die Binomialreihe (1826), die sich schon ausdrücklich auf das CAUCHYsche Werk stützt. Beide haben sich erst zögernd zu diesem entscheidenden Schritte entschlossen[2], doch erschien er schließlich beiden unvermeidlich, um ihre Schlüsse zu lückenlos scharfen zu machen.

Wir sind heute in der Lage, das Problem sozusagen von oben her zu übersehen; und da werden die Dinge sofort klar, wenn wir uns erinnern, daß das Symbol einer unendlichen Zahlenfolge — in welcher Form sie uns gegeben sein mag, als Folge, Reihe, Produkt oder anders — *von sich aus* keinerlei Bedeutung hat noch haben kann, sondern

---

[1] Vgl. dagegen S. 134, Fußnote 1.

[2] Bezüglich CAUCHY vgl. man hierzu das Vorwort zur *Analyse algébrique*, wo es u. a. heißt: Je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures, par exemple qu'une série divergente n'a pas de somme. Und bezüglich ABEL seinen Brief an HOLMBOE (16. I. 1826), in dem es heißt: Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration. — Daß schon viel früher J. D'ALEMBERT 1768 sich in ähnlichem Sinne geäußert hat, wurde schon oben erwähnt (s. S. 474, Fußnote 3).

daß ihm eine solche erst von uns durch freie Übereinkunft gegeben wurde. Und diese Verabredung bestand *erstlich* darin, daß wir nur *konvergente* Zahlenfolgen zuließen, d. h. nur solche, deren Glieder in einem ganz präzis definierten Sinne sich einer eindeutig bestimmten Zahl annäherten, und *zweitens* darin, daß wir diese Zahl der unendlichen Folge als ihren *Wert* zuordneten oder die Folge geradezu nur als ein anderes Zeichen (vgl. **41**, 1) für diese Zahl ansahen. So naheliegend und naturgemäß nun diese Festsetzung auch ist und so eng sie sich auch an die Entstehung der unendlichen Zahlenfolgen (etwa als schrittweise Annäherung an ein Ergebnis, das nicht mit einem Schlage erhalten werden kann) anschließen mag, so ist eine solche Festsetzung doch unter allen Umständen *als eine willkürliche* zu bezeichnen, und sie könnte auch durch ganz andere ersetzt werden. Nur die Zweckmäßigkeit und der Erfolg ist hier entscheidend, ob die eine oder die andere Festsetzung vorzuziehen ist; in der Natur der Sache selbst, d. h. in dem Symbol (s_n) einer unendlichen Zahlenfolge[1], liegt kein *bindender* Anhalt dafür vor.

Daher ist die Frage sehr wohl berechtigt, ob die (wenigstens stellenweis) beträchtliche Kompliziertheit unserer Theorie nicht etwa darauf zurückzuführen ist, daß unsere — wenn auch scheinbar noch so naheliegende — Deutung des Symbols (s_n) als *Limes* der als *konvergent* angenommenen Folge doch eine ungünstige ist. Denn in der mannigfachsten Weise könnte man andere Festsetzungen treffen, unter denen dann — vielleicht wenigstens — sich noch zweckmäßigere fänden. So
261. aufgefaßt ist das allgemeine *Problem*, das sich hier bietet, das folgende: *In irgendeiner Weise — durch unmittelbare Angabe ihrer Glieder, als Reihe, Produkt oder sonstwie — ist uns eine bestimmte Zahlenfolge (s_n) vorgelegt. Ist es möglich, ihr in vernünftiger Weise einen „Wert" s zuzuordnen?*

„*In vernünftiger Weise*" könnte hier einmal heißen, daß die Zahl s auf einem Wege gewonnen wird, der *in naher Beziehung zu dem bisherigen Konvergenzbegriff*, also zur Bildung von $\lim s_n = s$, steht, der sich in allem Vorangehenden so hervorragend bewährt hat, daß wir uns nicht ohne zwingenden Grund erheblich von ihm entfernen werden.

„*In vernünftiger Weise*" könnte andrerseits auch dahin ausgelegt werden, daß der Folge (s_n) ein Wert s solcherart zugeordnet werden soll, *daß, wo immer diese Folge als Endergebnis einer Rechnung auftreten sollte, diesem Endergebnis stets oder wenigstens im allgemeinen der Wert s zu geben ist.*

[1] Unter (s_n) mag man sich eine irgendwie gegebene Zahlenfolge, insbesondere also die Teilsummen einer unendlichen Reihe $\sum a_n$ oder die Teilprodukte eines unendlichen Produktes vorstellen. Wir benutzen den an „Summe" erinnernden Buchstaben s, weil die unendlichen Reihen bei weitem das wichtigste Mittel sind, durch das Zahlenfolgen definiert werden.

Wir erläutern diese allgemeinen Andeutungen zunächst an einem **Beispiel.** Die Reihe 262.

$$\sum(-1)^n \equiv 1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots,$$

also die geometrische Reihe $\sum x^n$ für $x = -1$ oder die Folge

$$(s_n) \equiv 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

wurde bisher als divergent verworfen, weil ihre Glieder s_n sich keinem bestimmten Zahlenwerte annäherten. Sie pendeln vielmehr zwischen 1 und 0 unaufhörlich hin und her. Gerade dies legt aber den Gedanken nahe, die arithmetischen Mittel

$$s'_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

zu bilden. Und da $s_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ ist, so findet man, daß

$$s'_n = \frac{(n+1) + \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]}{2(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1 + (-1)^n}{4(n+1)}$$

ist und daß also s'_n sich (im bisherigen Sinne) dem Werte $\frac{1}{2}$ nähert:

$$\lim s'_n = \tfrac{1}{2}.$$

Wir haben also durch diese sehr naheliegende Mittelbildung in einer ganz exakten Weise der paradoxen EULERschen Gleichung $1 - 1 + 1 - + \cdots = \frac{1}{2}$ einen Sinn unterlegen, der links stehenden Reihe den „Wert" $\frac{1}{2}$ zuordnen oder diesen aus der Reihe herausholen können. Ob nun, wo immer diese Reihe $\sum(-1)^n$ als Endergebnis einer Rechnung auftreten sollte, diesem Endergebnis der Wert $\frac{1}{2}$ zu geben ist, kann natürlich nicht ohne weiteres entschieden werden. Bei der Entwicklung $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ für $x = -1$ ist es gewiß der Fall; bei $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ für $x = 0$ ist es, wie man ziemlich leicht zeigen kann (vgl. Aufgabe 200), ebenfalls richtig, — und so ließen sich noch viele Belege dafür anführen, daß die Zuordnung des auf die beschriebene Weise erhaltenen Wertes $\frac{1}{2}$ zur Folge 1, 0, 1, 0, 1, ... eine „vernünftige" ist[1].

Man könnte daher versuchsweise definieren: Dann und nur dann, wenn die Folge der Zahlen

$$s'_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

im bisherigen Sinne einem Grenzwert s zustrebt, soll die Folge (s_n) bzw. die Reihe $\sum a_n$ „konvergent" mit der „Summe" s heißen.

---

[1] Auch aus der Reihe (s. o.) für $\frac{1+x}{1+x+x^2}$ läßt sich hiernach bei $x = 1$ der Wert $\frac{2}{3}$ herausholen. Man hat dazu nur zu beachten, daß die Reihe, etwas sorgfältiger geschrieben, $1 + 0\cdot x - x^2 + x^3 + 0\cdot x^4 - x^5 + + - \cdots$ und für $x = 1$ also $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + + - \cdots$ lautet.

Ihre Zweckmäßigkeit hätte diese neue Definition schon an der Reihe $\sum(-1)^n$ erwiesen, die nun eine „im neuen Sinne" konvergente Reihe mit der Summe $\frac{1}{2}$ wäre, — was uns durchaus sinnvoll erscheint. Noch zwei weitere Bemerkungen sollen die Vorteile dieser neuen Festsetzung beleuchten:

1. Jede im bisherigen Sinne konvergente Folge (s_n) mit dem Grenzwerte s ist nach dem CAUCHYschen Satze **43**, 2 so beschaffen, daß sie auch „im neuen Sinne" konvergent genannt werden müßte und daß sie dabei denselben Wert hat. Die neue Festsetzung würde also jedenfalls mindestens dasselbe leisten, wie die bisherige, würde aber, wie das Beispiel der Reihe $\sum(-1)^n$ eben zeigte, mehr zu leisten imstande sein.

2. Wenn man zwei (im alten Sinne) konvergente Reihen $\sum a_n = A$ und $\sum b_n = B$ nach der CAUCHYschen Regel miteinander multipliziert und so die Reihe $\sum c_n \equiv \sum(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$ bildet, so wissen wir, daß diese Reihe nicht wieder (im alten Sinne) konvergent zu sein braucht. Und die Frage, wann $\sum c_n$ nun doch konvergiert, bietet sehr erhebliche Schwierigkeiten und ist bis heute noch nicht befriedigend geklärt. Der zweite Beweis des Satzes **189** lehrt aber, daß in jedem Falle

$$\frac{C_0 + C_1 + \cdots + C_n}{n+1} \to A\,B$$

strebt, wenn mit C_n die Teilsummen der Reihe $\sum c_n$ bezeichnet werden. Das bedeutet aber jetzt gerade, daß $\sum c_n$ *in jedem Falle* eine *im neuen Sinne* konvergente Reihe mit der Summe $A\,B$ ist. Hier ist der Vorteil der neuen Festsetzung offenbar: Ein Sachverhalt, dessen Klärung bei strengem Festhalten am alten Konvergenzbegriff unüberwindliche Schwierigkeiten bietet, läßt sich durch Einführung eines etwas allgemeineren Konvergenzbegriffes in einfachster Weise erschöpfend erledigen.

Gleich nachher werden wir noch weitere Untersuchungen dieser Art kennenlernen (s. besonders § 61); vorerst aber wollen wir noch über einige prinzipielle Dinge Festsetzungen treffen:

Neben der Bildung der arithmetischen Mittel werden wir noch eine ganze Anzahl anderer Verfahren kennenlernen, durch die man, statt durch den bisherigen Konvergenzbegriff, mit gutem Erfolge einer Zahlenfolge (s_n) einen Wert s zuordnen kann. Alle diese Verfahren müssen wir durch passende Benennungen voneinander unterscheiden; und es empfiehlt sich dabei folgendermaßen vorzugehen: Der bisherige Konvergenzbegriff war so naturgemäß und hat sich so bewährt, daß er durch eine besondere Bezeichnung auch weiterhin ausgezeichnet bleiben soll. Unter der *Konvergenz* einer unendlichen Zahlenfolge (einer Reihe, eines Produktes, ...) soll darum nach wie vor nichts anderes verstanden werden, als was bisher darunter verstanden worden ist.

Und wenn nun auf Grund neuer Festsetzungen, wie z. B. durch die vorhin beschriebene Bildung der arithmetischen Mittel, einer Folge (s_n) eine Zahl s zugeordnet wird, so wollen wir die Folge (s_n) als durch dieses Verfahren ***limitierbar***, die zugehörige Reihe $\sum a_n$ als durch dasselbe ***summierbar*** und s als ihren *Wert* (bei einer Reihe wohl auch als ihre *Summe*) bezeichnen.

Sobald wir aber, wie es gleich nachher geschehen wird, *mehrere* Verfahren dieser Art benutzen, so unterscheiden wir sie durch vorgesetzte Initialen $A, B, \ldots, V, \ldots$ und sprechen also etwa von einem V-Verfahren[1]. Die Folge (s_n) soll dann *V-limitierbar*, die Reihe $\sum a_n$ *V-summierbar* heißen, und die Zahl s werden wir als den V-Limes der Folge bzw. als die V-Summe der Reihe bezeichnen, in Zeichen:

$$V\text{-}\lim s_n = s \quad \text{bzw.} \quad V\text{-}\sum a_n = s.$$

Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, wollen wir die erste der beiden Aussagen auch durch die Symbolik

$$V(s_n) \to s$$

bezeichnen, was also genauer besagen soll, daß die durch das V-Verfahren aus der Folge (s_n) hergestellte *neue Folge* gegen s strebt.

Läßt das Verfahren, wie dies im folgenden des öfteren der Fall sein wird, eine k-malige Iterierung oder eine Abstufung in verschiedenen Ordnungen zu, so setzen wir k als Index hinzu und sprechen also von einer *V_k-Limitierung*, *V_p-Summierung*, usw.

Bei der Aufstellung und Auswahl solcher Verfahren werden wir **263.**
nun natürlich nicht absolute Willkür herrschen, sondern uns von Zweckmäßigkeitsgründen leiten lassen. Als Grundforderung, die hier zu erheben wäre, muß man wohl an die Spitze stellen, daß die neue Festsetzung mit der alten nicht in Widerspruch steht. Von jedem etwa einzuführenden Verfahren V fordern wir daher zunächst, daß die folgende *Permanenzbedingung* erfüllt sei:

I. *Eine im bisherigen Sinne konvergente Zahlenfolge (s_n) mit dem Grenzwerte s soll auch V-limitierbar zum Werte s sein.* Oder: *Aus $\lim s_n = s$ soll stets auch V-$\lim s_n = s$ folgen*[2].

Damit nun weiter die Einführung eines solchen Verfahrens nicht überflüssig sei, fordern wir, daß auch die folgende *Erweiterungsbedingung* erfüllt ist:

---

[1] Bei dem Begriff der *Integrierbarkeit*, wo etwas Ähnliches vorliegt, ist diese Bezeichnungsweise wohl zuerst eingeführt worden. So spricht man von Funktionen, die *R-integrierbar*, und solchen, die *L-integrierbar* sind, je nachdem man Integrierbarkeit im RIEMANNschen oder im LEBESGUEschen Sinne meint.

[2] Man könnte sich auch schon damit zufrieden geben, wenn das betreffende Verfahren wenigstens einen Teil der konvergenten Folgen zu unverändertem Werte zu limitieren vermag. Ein solcher Fall tritt z. B. bei dem weiter unten besprochenen E_p-Verfahren ein, falls der Index p komplex ist.

II. *Es soll mindestens* ***eine*** *im bisherigen Sinne divergente Folge* (s_n) *geben, die sich nach dem neuen Verfahren als limitierbar erweist.*

Bezeichnen wir die Gesamtheit derjenigen Folgen, die durch ein bestimmtes Verfahren limitierbar sind, als dessen ***Wirkungsfeld,*** so bedeutet die Forderung II, daß wir nur solche Verfahren zulassen wollen, deren Wirkungsfeld umfassender ist als dasjenige der gewöhnlichen Konvergenz. Gerade die Limitierung der bisher divergenten Folgen bzw. die Summierung der divergenten Reihen wird natürlich jetzt das Hauptinteresse beanspruchen.

Werden endlich mehrere Verfahren *nebeneinander* benutzt, etwa *gleichzeitig* ein V- und ein W-Verfahren, so würde eine völlige Verwirrung zu befürchten sein, wenn wir nicht auch forderten, daß noch die folgende *Verträglichkeitsbedingung* erfüllt sei:

III. *Ist ein und dieselbe Folge* (s_n) *nach zwei verschiedenen, gleichzeitig benutzten Verfahren limitierbar, so soll ihr durch beide stets* ***derselbe*** *Wert zugeordnet werden.* Oder: *Es soll stets* $V\text{-}\lim s_n = W\text{-}\lim s_n$ *sein, falls beide Werte existieren.*

Wir wollen nur solche Verfahren betrachten, die diese drei Forderungen erfüllen. Darüber hinaus aber bedarf es noch der Auslegung, ob die durch ein bestimmtes Verfahren V bewirkte Zuordnung des Wertes s zu einer Folge (s_n) in dem oben (S. 476) dargelegten Sinne eine *vernünftige* ist. Hier wird man sehr verschiedene Forderungen stellen können, und die Verfahren, die im Gebrauch sind, sind in dieser Beziehung sehr verschieden leistungsfähig. Zunächst wäre wohl zu fordern, daß die elementaren Regeln des Rechnens mit konvergenten Folgen (s. § 8) möglichst erhalten bleiben, also das gliedweise Addieren und Subtrahieren zweier Folgen, die gliedweise Addition einer Konstanten, die gliedweise Multiplikation mit einer solchen, die Beeinflussung durch endlich viele Änderungen (**27**, 4) usw. Weiter wird dann vielleicht zu fordern sein, daß, wenn etwa der divergenten Reihe $\sum a_n$ der Wert s zugeordnet wird und wenn diese Reihe z. B. aus der Potenzreihe $f(x) = \sum c_n x^n$ für einen speziellen Wert x_1 von x entsteht, daß dann die Zahl s zu $f(x_1)$ oder zu $\lim f(x)$ für $x \to x_1$ in sinngemäßer Beziehung steht, und daß Entsprechendes für andere Typen von Reihen (die DIRICHLETschen, FOURIERschen u. a.) der Fall ist; *kurz, daß, wo immer diese divergente Reihe als Endergebnis einer Rechnung auftreten sollte, diesem Endergebnis der Wert s zu geben ist.* Je mehr solcher und ähnlicher Forderungen — wir wollen sie, ohne auf eine
264. genaue Präzisierung derselben Wert zu legen, als die *Forderungen F* bezeichnen — ein bestimmtes Verfahren erfüllt und je größer zugleich sein Wirkungsfeld ist, als desto brauchbarer und wertvoller wird man es ansehen dürfen.

Wir gehen nun dazu über, einige solche Limitierungsverfahren anzugeben, die sich nach der einen oder andern Richtung hin bewährt haben:

1. Das C_1-, H_1- oder M-Verfahren[1]. Wir bilden, wie oben unter **262** beschrieben, aus den Gliedern einer Folge (s_n) die arithmetischen Mittel **265.**

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

die wir mit c'_n, h'_n oder m_n bezeichnen. Streben diese nun für $n \to \infty$ im bisherigen Sinne einem Grenzwert s zu, so sagen wir, die Folge (s_n) sei ***C_1-, H_1- oder M-limitierbar*** zu diesem Werte s und schreiben kurz

$$M\text{-}\lim s_n = s \qquad \text{oder} \qquad M(s_n) \to s,$$

oder wir benutzen den Buchstaben C_1 oder H_1 an Stelle von M. Die Reihe $\sum a_n$, deren Teilsummen die s_n sind, *soll dann* ***C_1-, H_1- oder M-summierbar,*** *die Zahl s ihre C_1-, H_1- bzw. M-Summe heißen.*

Die Einheitsfolge 1, 1, 1, ... kann wohl als die denkbar einfachste konvergente Zahlenfolge angesehen werden. Das beschriebene Verfahren besteht dann darin, daß die Glieder s_n der zu untersuchenden Folge *im Mittel* mit denen der Einheitsfolge verglichen werden:

$$c'_n \equiv h'_n \equiv m_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{1 + 1 + \cdots + 1}.$$

Diesen „gemittelten" Vergleich der Folge (s_n) mit der Einheitsfolge werden wir auch bei den folgenden Verfahren wiederfinden.

Die Brauchbarkeit dieses Verfahrens haben wir schon oben an einigen Beispielen erläutert. Auch daß es die Forderungen **263**, I und II erfüllt, haben wir schon gesehen, und III kommt im Augenblick noch nicht in Betracht. Die §§ 60 und 61 endlich werden zeigen, daß auch die Forderungen F (**264**) in weitem Ausmaße erfüllt sind.

2. Das Höldersche oder H_p-Verfahren[2]. Gehen wir bei einer gegebenen Folge (s_n) von den eben gebildeten Mitteln h'_n erneut zu deren arithmetischen Mitteln

$$h''_n = \frac{h'_0 + h'_1 + \cdots + h'_n}{n+1}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

über und hat die Folge der h''_n einen Grenzwert im gewöhnlichen Sinne, $\lim h''_n = s$, *so sagen wir, die Folge (s_n) sei* ***H_2-limitierbar***[3] *zum Werte s.*

---

[1] Die Wahl der Buchstaben C und H findet in den beiden nächsten Nummern ihre Erklärung.

[2] Hölder, O.: Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze. Math. Ann. Bd. 20, S. 535—549. 1882. Hier werden zu einem speziellen Zweck zum ersten Male arithmetische Mittel der beschriebenen Art eingeführt.

[3] Die übrigen analog gebildeten Bezeichnungen, H_2-$\lim s_n = s$, H_2-$\sum a_n = s$, $H_2(s_n) \to s$ usw. führen wir nun nicht mehr besonders an.

Nach **43**, 2 ist jede H_1-limitierbare (und also auch jede konvergente) Folge stets auch H_2-limitierbar zum gleichen Werte. Das neue Verfahren erfüllt also die Forderungen **263**, I, II und III. Sein Wirkungsfeld ist auch umfassender als das des H_1-Verfahrens, denn z. B. die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1) \equiv 1 - 2 + 3 - 4 + - \cdots$$

ist H_2-summierbar mit der Summe $\frac{1}{4}$, aber nicht H_1-summierbar oder gar konvergent. In der Tat ist hier

$$(s_n) \equiv 1, \ -1, \ 2, \ -2, \ 3, \ -3, \ldots$$

und

$$(h_n') \equiv 1, \ 0, \ \tfrac{2}{3}, \ 0, \ \tfrac{3}{5}, \ 0, \ldots$$

Diese Folgen sind also noch nicht konvergent. Aber, wie man leicht nachrechnet, streben die $h_n'' \to \frac{1}{4}$, d. h. gerade gegen den Wert, den man nach

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n$$

für $x = -1$ erwarten würde.

Geht man auch bei den h_n'' noch nicht zur Grenze über, sondern bildet erst

$$h_n''' = \frac{h_0'' + h_1'' + \cdots + h_n''}{n+1}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

und für $p \geqq 2$ allgemein[1]

$$h_n^{(p)} = \frac{h_0^{(p-1)} + h_1^{(p-1)} + \cdots + h_n^{(p-1)}}{n+1}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

und strebt bei einem bestimmten p nun $h_n^{(p)} \to s$, so sagen wir analog: *Die Folge (s_n) sei* ***H_p-limitierbar*** *zum Werte s.*

Man kann sich leicht Folgen bilden, die für ein bestimmtes p, aber für keinen kleineren Wert dieses Index, H_p-limitierbar sind[2]. Dies lehrt in Verbindung mit **43**, 2 nicht nur, daß die H_p-Verfahren die Forderungen **263**, I—III erfüllen, sondern weiter, daß ihr Wirkungsfeld für jedes bestimmte $p \geqq 2$ umfassender ist als für die kleineren Werte dieses Index. Bezüglich der Forderungen F sei wieder auf die §§ 60 und 61 verwiesen.

---

[1] Oder schon für $p \geqq 1$, falls man übereinkommt, $h_n^{(0)} \equiv s_n$ zu setzen und unter dem H_0-Verfahren also die gewöhnliche Konvergenz zu verstehen, wie wir dies hier und in allen analogen späteren Fällen tun wollen.

[2] Man setze etwa $(h_n^{(p-1)}) \equiv 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ und errechne sich daraus rückwärts die s_n. Andere Beispiele finden sich in den folgenden Paragraphen.

3. Das CESÀROsche oder C_k-Verfahren[1]. Hier setzt man zunächst $s_n \equiv S_n^{(0)}$ und dann weiter für $k \geqq 1$

$$S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)} = S_n^{(k)}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

und untersucht dann für ein bestimmtes k die Folge[2]

$$c_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}.$$

Strebt bei festem k die Folge $c_n^{(k)} \to s$, so sagen wir, *die Folge* (s_n) *sei* ***C_k-limitierbar*** *zum Werte s.*

Während man bei dem H-Verfahren nicht zu übersichtlichen Formeln gelangt, wenn man die $h_n^{(p)}$ für größere Werte von p unmittelbar durch die s_n ausdrücken will, ist dies für das C-Verfahren in einfachster Weise möglich, denn es ist

$$S_n^{(k)} = \binom{n+k-1}{k-1} s_0 + \binom{n+k-2}{k-1} s_1 + \cdots + \binom{k-1}{k-1} s_n$$

oder

$$= \binom{n+k}{k} a_0 + \binom{n+k-1}{k} a_1 + \cdots + \binom{k}{k} a_n,$$

wenn man auf die Reihe $\sum a_n$ mit den Teilsummen s_n zurückgehen will. Man beweist dies ganz leicht durch Induktion oder auch mit Hilfe der Bemerkung, daß nach **102**

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k-1)} x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n$$

und also für jedes ganze $k \geqq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = \frac{1}{(1-x)^k} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ist, woraus nach **108** die Behauptung folgt[3].

Auch auf dieses Verfahren, das für den Index 1 mit dem vorigen identisch ist ($h_n' \equiv c_n'$), werden wir in den folgenden Paragraphen genau eingehen.

---

[1] CESÀRO, E.: Sur la multiplication des séries. Bull. des sciences math (2) Bd. 14, S. 114—120. 1890.

[2] Die Nenner auf der rechten Seite sind genau die Werte, die man für $S_n^{(k)}$ erhält, wenn man von der Folge $(s_n) \equiv 1, 1, 1, \ldots$ ausgeht, d. h. sie geben an, wieviel Teilsummen s_ν in $S_n^{(k)}$ zusammengefaßt sind. Es handelt sich bei dem C_k-Verfahren also wieder um einen „gemittelten" Vergleich einer vorgelegten Folge (s_n) mit der Einheitsfolge.

[3] Diese letzten Formeln legen es ziemlich nahe, für den Index k auch *nicht-ganze* Zahlen > -1 zuzulassen. Solche Limitierungen von nicht-ganzzahliger Ordnung sind zuerst vom Verfasser (Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Inaug.-Diss. Berlin 1907) eingeführt und untersucht worden. Wir werden hierauf indessen weder bei dem C-Verfahren noch bei den weiterhin behandelten Verfahren eingehen.

4. Das Abelsche oder A-Verfahren. Ist $\sum a_n$ mit den Teilsummen s_n vorgelegt, so betrachten wir die Potenzreihe

$$f(x) = \sum a_n x^n = (1 - x) \sum s_n x^n.$$

Ist deren Radius $\geqq 1$ und ist der (für reelle x genommene) Grenzwert

$$\lim_{x \to 1-0} \sum a_n x^n = \lim_{x \to 1-0} (1 - x) \sum s_n x^n = s$$

vorhanden, so sagen wir, *die Reihe $\sum a_n$ sei **A-summierbar**[1], die Folge (s_n) sei **A-limitierbar** zum Werte s; in Zeichen*:

$$A\text{-}\sum a_n = s \quad \text{bzw.} \quad A\text{-}\lim s_n = s.$$

Infolge des Abelschen Grenzwertsatzes **100** erfüllt auch dieses Verfahren die Permanenzbedingung I, und einfache Beispiele lehren, daß es die Erweiterungsbedingung II erfüllt, denn z. B. für die schon oben benutzte Reihe $\sum (-1)^n$ ist für $x \to 1 - 0$ der Grenzwert

$$\lim \left(\sum (-1)^n x^n\right) = \lim \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{2}$$

vorhanden. Auch nach diesem Verfahren also ist die paradoxe Eulersche Gleichung (s. S. 474) gerechtfertigt. Schreiben wir dafür jetzt präziser

$$A\text{-}\sum (-1)^n = \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad C_1\text{-}\sum (-1)^n = \tfrac{1}{2},$$

so sind damit ganz bestimmte Verfahren angedeutet, durch die der Wert $\frac{1}{2}$ aus der Reihe $\sum (-1)^n$ herausgeholt werden kann.

5. Das Eulersche oder E-Verfahren. In **144** sahen wir: Wenn von den beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k a_0}{2^{k+1}}$$

die *erste* konvergiert, so konvergiert auch die *zweite* und liefert dieselbe Summe. Nun zeigen aber einfache Beispiele, daß die zweite Reihe sehr wohl konvergieren kann, wenn die erste es nicht tut:

1. Wenn $a_n \equiv 1$, so ist $a_0 = 1$ und $\Delta^k a_0 = 0$ für $k \geqq 1$. Die beiden Reihen lauten also

$$1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \cdots,$$

deren zweite mit der Summe $\frac{1}{2}$ konvergiert.

[1] Schreibt man das Produkt $(1 - x) \sum s_n x^n$ in der Form

$$\frac{\sum s_n x^n}{\sum x^n},$$

so sieht man, daß es sich auch hier um einen, wenn auch in etwas anderer Weise „gemittelten" Vergleich der gegebenen Folge mit der Einheitsfolge handelt.

2. Ist für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_n = \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \ldots\ldots$$

so ist

$$\Delta a_n = -1, -1, -1, -1, \ldots$$

und für $k \geqq 2$

$$\Delta^k a_n = \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \ldots$$

Die beiden Reihen lauten also

$$1 - 2 + 3 - 4 + - \cdots \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + 0 + 0 + \cdots,$$

deren zweite mit der Summe $\frac{1}{4}$ konvergiert.

3. Ähnlich findet man für $a_n = (n+1)^3$, daß $\Delta a_0 = -7$, $\Delta^2 a_0 = 12$, $\Delta^3 a_0 = -6$ und für $k > 3$ stets $\Delta^k a_0 = 0$ ist. Die beiden Reihen lauten hier also

$$1 - 8 + 27 - 64 + - \cdots \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2} - \tfrac{7}{4} + \tfrac{12}{8} - \tfrac{6}{16} + 0 + 0 + \cdots,$$

deren zweite mit der Summe $-\frac{1}{8}$ konvergiert.

4. Für $a_n = 2^n$ ist $\Delta^k a_0 = (-1)^k$. Die beiden Reihen lauten also:

$$1 - 2 + 4 - 8 + - \cdots \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + - \cdots,$$

deren zweite mit der Summe $\frac{1}{3}$ konvergiert, d. h. mit einer Summe, die man wegen $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ für $x = -2$ auch erwarten möchte.

5. Für $a_n = (-1)^n z^n$ ist $\Delta^k a_0 = (1+z)^k$. Die beiden Reihen lauten also

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+z)^k}{2^{k+1}},$$

deren zweite mit der Summe $\frac{1}{1-z}$ konvergiert, wofern nur $|z+1| < 2$ ist.

Gehen wir von einer *nicht* alternierend geschriebenen beliebigen Reihe $\sum a_n$ aus, so hätten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n' \quad \text{mit} \quad a_n' = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \cdots + \binom{n}{n} a_n\right]$$

als EULERsche Transformation derselben anzusehen, zu der man auch folgendermaßen gelangt: Die Reihe $\sum a_n$ entsteht aus der Potenzreihe $\sum a_n x^{n+1}$ für $x = 1$ und also aus der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{y}{1-y}\right)^{n+1}$$

für $y = \frac{1}{2}$. Entwickelt man nun diese letztere erst nach Potenzen von y, ehe man $y = \frac{1}{2}$ setzt, so erhält man genau die EULERsche Transformation. In der Tat ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{y}{1-y}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{k+\lambda}{k} y^{k+\lambda+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu \right\} y^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n (2y)^{n+1}.$$

Um dies Verfahren für beliebige Zahlenfolgen (s_n) nutzbar zu machen, setzen wir die Teilsummen der beiden Reihen $\sum a_n$ und $\sum a'_n$ etwas abweichend von der üblichen Bezeichnung

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = s_n \quad \text{für} \quad n \geqq 1 \quad \text{und} \quad s_0 = 0,$$

sowie

$$a'_0 + a'_1 + \cdots + a'_{n-1} = s'_n \quad \text{für} \quad n \geqq 1 \quad \text{und} \quad s'_0 = 0.$$

Dann rechnet man leicht nach, daß für $n \geqq 0$

$$s'_n = \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} s_0 + \binom{n}{1} s_1 + \cdots + \binom{n}{n} s_n\right]$$

ist[1]. Demgemäß setzen wir fest: *Eine Folge (s_n) soll* ***E_1-limitierbar*** *heißen zum Werte s*, falls die eben definierte Folge $s'_n \to s$ strebt[2]. Setzt man, ohne das Konvergenzverhalten von (s'_n) zu prüfen,

$$s''_n = \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} s'_0 + \binom{n}{1} s'_1 + \cdots + \binom{n}{n} s'_n\right]$$

und allgemein für $r \geqq 1$

$$s_n^{(r)} = \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} s_0^{(r-1)} + \binom{n}{1} s_1^{(r-1)} + \cdots + \binom{n}{n} s_n^{(r-1)}\right], \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so werden wir analog die Folge (s_n) als *E_r-limitierbar* bezeichnen und

---

[1] Aus $\sum a_n x^{n+1} = \sum a'_n (2y)^{n+1}$ folgt durch Multiplikation mit $\frac{1}{1-x} = \frac{1-y}{1-2y}$ zunächst

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k = (1-y) \sum_{n=0}^{\infty} s'_n (2y)^n.$$

Es ist also

$$\sum_{n=0}^{\infty} s'_n (2y)^n = \frac{1}{1-y} \sum_{k=0}^{\infty} s_k \left(\frac{y}{1-y}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{k+\lambda}{k} s_k y^{k+\lambda}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} s_0 + \binom{n}{1} s_1 + \cdots + \binom{n}{n} s_n\right] (2y)^n,$$

woraus die Beziehung abzulesen ist.

[2] Auch hier wird der Nenner 2^n aus dem Zähler $\left[\binom{n}{0} s_0 + \cdots + \binom{n}{n} s_n\right]$ erhalten, indem man alle $s_n = 1$ setzt. Es handelt sich also wieder um einen in bestimmter Weise „gemittelten" Vergleich der Folge (s_n) mit der Einheitsfolge.

s als ihren E_r-Limes ansehen, falls für ein bestimmtes r die $s_n^{(r)} \to s$ streben.

Unser früherer Satz **144** (s. auch **44**, 8) lehrt dann jedenfalls, daß dies E-Verfahren der Permanenzbedingung I genügt, und die dazu gegebenen Beispiele zeigen, daß auch die Erweiterungsbedingung II erfüllt ist. Wir werden auf dies Verfahren in § 63 genauer eingehen.

6. Das Rieszsche oder $R_{\mu k}$-Verfahren[1]. Es liegt nahe, das Prinzip des gemittelten Vergleichs der Folge (s_n) mit der Einheitsfolge, das, wie wir sahen, allen bisherigen Verfahren zugrunde lag, dadurch leistungsfähiger zu gestalten, daß man den Gliedern s_n *irgendwelche* Gewichte beilegt. Ist also etwa $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ irgendeine Folge positiver Zahlen, so ist

$$s_n' = \frac{\mu_0 s_0 + \mu_1 s_1 + \cdots + \mu_n s_n}{\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_n}$$

eine solche allgemeinere Mittelbildung. In dem besonderen Fall, daß $\mu_n = 1 / (n + 1)$ ist, spricht man von *logarithmischen Mitteln*.

Nach dem Vorbilde des H-, C- oder E-Verfahrens kann man diese natürlich sogleich iterieren, indem man, etwa im Anschluß an das C-Verfahren,

$$\sigma_n^{(0)} = s_n \quad \text{und} \quad \lambda_n^{(0)} = 1$$

und dann für $k \geqq 1$

$$\sigma_n^{(k)} = \mu_0 \sigma_0^{(k-1)} + \mu_1 \sigma_1^{(k-1)} + \cdots + \mu_n \sigma_n^{(k-1)}$$

sowie

$$\lambda_n^{(k)} = \mu_0 \lambda_0^{(k-1)} + \mu_1 \lambda_1^{(k-1)} + \cdots + \mu_n \lambda_n^{(k-1)}$$

setzt und nun für ein festes $k \geqq 1$ die Quotienten

$$\varrho_n^{(k)} = \frac{\sigma_n^{(k)}}{\lambda_n^{(k)}}$$

für $n \to +\infty$ untersucht. Streben sie einem Grenzwerte s zu, so könnte man sagen, die Folge (s_n) sei $R_{\mu k}$-limitierbar[2] zum Werte s. Diese Definition ist indessen nicht in Gebrauch; das Verfahren hat vielmehr erst dadurch seine große Bedeutung bekommen, daß es folgendermaßen in eine analytisch besser zu handhabende Form gebracht worden ist: Definiert man die (komplexe) Funktion $s(t)$ der reellen Veränderlichen $t \geqq 0$ durch die Festsetzungen

$$s(t) = s_\nu \quad \text{in} \quad \lambda_{\nu-1}^{(1)} < t \leqq \lambda_\nu^{(1)}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots; \lambda_{-1}^{(1)} = 0),$$

und setzt noch $s(0) = 0$, so ist

$$\mu_0 s_0 + \mu_1 s_1 + \cdots + \mu_n s_n = \int_0^{\lambda_n^{(1)}} s(t)\, dt,$$

[1] Riesz, M.: Sur les séries de Dirichlet et les séries entières. Comptes rendus Bd. 149, S. 909—912. 1909.

[2] Wir fügen hier der Bezeichnung R_k des Verfahrens noch den Index μ an, um an die zur Mittelbildung verwendete Folge (μ_n) zu erinnern. Für $\mu_n \equiv 1$ haben wir genau das C_k-Verfahren vor uns.

und es liegt nahe, die bei der Bildung der $\sigma_n^{(k)}$ und $\lambda_n^{(k)}$ benutzte iterierte Summation jetzt durch iterierte Integration zu ersetzen. Nach k-maliger Integration[1] erhält man

$$\int_0^\omega d t_{k-1} \int_0^{t_{k-1}} \cdots \int_0^{t_1} s(t)\, dt = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\omega s(t) \cdot (\omega - t)^{k-1}\, dt$$

als Ersatz für die Größen $\sigma_n^{(k)}$. Entsprechend hat man statt der $\lambda_n^{(k)}$ diejenigen Werte zu nehmen, die man aus dem eben aufgestellten Integral für $s_n \equiv 1$ erhält, also die Werte

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^\omega (\omega - t)^{k-1}\, dt = \frac{\omega^k}{k!}.$$

Dann würde es sich (bei festem k) um den Grenzwert

$$\lim_{\omega \to +\infty} \frac{k}{\omega^k} \int_0^\omega s(t)(\omega - t)^{k-1}\, dt$$

handeln. Ist er vorhanden und $= s$, *so soll nun die Folge* (s_n) *als* ***$R_{\mu k}$-limitierbar*** *zum Werte s bezeichnet werden.*

Auf eine genauere Untersuchung darüber, ob sich die beiden eben gegebenen Definitionen des R-Verfahrens wirklich genau decken, sowie auf die schönen und tiefgehenden Anwendungen des Verfahrens in der Theorie der DIRICHLETschen Reihen können wir hier nicht näher eingehen. (Literaturangaben s. 266.)

7. Das BORELsche oder B-Verfahren. Wir sahen eben, wie das RIESZsche Verfahren die Leistungsfähigkeit des H- oder des C-Verfahrens dadurch zu erhöhen strebte, daß es die bei diesen vorgenommene Mittelung des Vergleiches der Folge (s_n) mit der Einheitsfolge in allgemeinerer Weise ansetzte als bei diesen. In ähnlicher Weise kann man das Wirkungsfeld des ABELschen Verfahrens dadurch zu vergrößern versuchen, daß man statt der geometrischen Reihe, die dort zum Vergleich benutzt wurde, andre Reihen heranzuziehen sucht. Nimmt man speziell die Exponentialreihe und betrachtet demgemäß den Quotienten der beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

oder also das Produkt

$$F(x) = e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$$

[1] Die Übereinstimmung beider Seiten beweist man leicht induktiv durch partielle Integration.

für $x \to +\infty$, so erhalten wir das von E. BOREL[1] eingeführte Verfahren. Demgemäß definieren wir: Ist eine Folge (s_n) so beschaffen, daß die Potenzreihe $\sum s_n \frac{x^n}{n!}$ beständig konvergiert und daß die eben erklärte Funktion $F(x)$ für $x \to +\infty$ einem Grenzwerte s zustrebt, *so soll die Folge* (s_n) *als* ***B-limitierbar*** *zum Werte* s *bezeichnet werden.*

Nehmen wir etwa, um dieses Verfahren ein wenig zu erläutern, zunächst wieder $\sum a_n \equiv \sum (-1)^n$, so ist $s_n = 1$ oder $= 0$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Also wird

$$\sum s_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

und es handelt sich um den Grenzwert

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

der offenbar $= \frac{1}{2}$ ist. $\sum (-1)^n$ ist also auch B-summierbar mit der Summe $\frac{1}{2}$. Nimmt man allgemein $\sum a_n \equiv \sum z^n$, so ist, falls nur $z \neq +1$,

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

also

$$F(x) = e^{-x} \cdot \sum s_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z} e^{(z-1)x},$$

und für $x \to +\infty$ strebt dies $\to \frac{1}{1-z}$, wofern $\Re(z) < 1$ ist. *Die geometrische Reihe* $\sum z^n$ *ist also in der Halbebene* $\Re(z) < 1$ *allenthalben B-summierbar*[2] *zur Summe* $\frac{1}{1-z}$.

Dies Verfahren erfüllt auch die *Permanenzbedingung*; denn es ist

$$\left(e^{-x} \cdot \sum s_n \frac{x^n}{n!}\right) - s = e^{-x} \cdot \sum (s_n - s) \frac{x^n}{n!}.$$

Strebt also im bisherigen Sinne $s_n \to s$, so kann man bei gegebenem $\varepsilon > 0$ ein m so groß wählen, daß für $n > m$ stets $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Dann ist aber der Betrag des letzten Ausdrucks für positive x

$$\leqq e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |s_n - s| \cdot \frac{x^n}{n!} \leqq e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{m} |s_n - s| \cdot \frac{x^n}{n!} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

[1] Sur la sommation des séries divergentes. Comptes rendus Bd. 121, S. 1125. 1895, — und in vielen anschließenden Noten. Eine zusammenfassende Darstellung gab er in seinen Leçons sur les séries divergentes. 2. Aufl. Paris 1928.

[2] Durch die C-Verfahren ist, wie in **268**, 8 gezeigt wird, die geometrische Reihe, außer für $|z| < 1$, nur noch in den von $+1$ verschiedenen *Randpunkten* des Einheitskreises summierbar, durch das EULERsche Verfahren in dem Kreise $|z+1| < 2$, der den Einheitskreis weit umschließt, durch das BORELsche Verfahren sogar in der ganzen Halbebene $\Re(z) < 1$ und stets zum Werte $\frac{1}{1-z}$.

Da aber für $x \to +\infty$ das Produkt von e^{-x} mit einem Polynom m^{ten} Grades $\to 0$ strebt, so kann ξ so groß gewählt werden, daß für $x > \xi$ dies Produkt $< \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Für diese x ist dann der Betrag des ganzen Ausdrucks $< \varepsilon$ und somit unsre Behauptung bewiesen.

8. Das B_r-Verfahren. Das Wirkungsfeld des eben beschriebenen Verfahrens wird in gewissem Sinne dadurch vergrößert, daß man statt der Reihe $\sum \frac{x^n}{n!}$ andere heranzieht, zunächst etwa $\sum \frac{x^{rn}}{(rn)!}$ für ein festes ganzzahliges $r > 1$. *Wir nennen eine Folge* (s_n) *demgemäß* ***B_r-limitierbar*** *zum Werte* s, falls der Quotient der beiden Funktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^{rn}}{(rn)!} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{rn}}{(rn)!}, \quad \text{also das Produkt } r\,e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^{rn}}{(rn)!}$$

für $x \to +\infty$ dem Grenzwert s zustrebt. (Dabei muß natürlich wieder angenommen werden, daß die erste der genannten Reihen beständig konvergent ist.) So ist z. B. das B-Verfahren auf die Folge $s_n = (-1)^n\, n!$ gar nicht anwendbar, weil für sie $\sum s_n \frac{x^n}{n!} = \sum (-1)^n x^n$ nicht für alle x konvergiert. Dagegen ist $\sum s_n \frac{x^{rn}}{(rn)!}$ schon für $r = 2$ beständig konvergent[1].

9. Das Verfahren von Le Roy. Wir haben die Verfahren meist so gedeutet, daß durch sie ein „gemittelter" Vergleich zwischen der vorgelegten Folge (s_n) und der Einheitsfolge $1, 1, 1, \ldots$ vorgenommen wird. Man kann die Dinge auch ein klein wenig anders ansehen. Sind die s_n die Teilsummen der Reihe $\sum a_n$, so ist z. B. beim C_1-Verfahren der Grenzwert von

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$
$$= a_0 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) a_1 + \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) a_2 + \cdots + \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) a_n$$

zu untersuchen. Den Gliedern der Reihe $\sum a_n$ erscheinen hier *variable Faktoren* zugeteilt, die die Reihe zu einer endlichen, also jedenfalls zu einer im alten Sinne konvergenten machen. Durch diese Faktoren wird der Einfluß der fernen Glieder ausgeschaltet oder herabgedrückt; mit wachsendem n aber steigen die Faktoren gegen 1 und ziehen so schließlich doch alle Glieder zur vollen Wirksamkeit heran. Ähnlich liegt es bei dem Abelschen Verfahren, wo es sich um den Grenzwert von $\sum a_n x^n$ für $x \to 1 - 0$ handelt; hier sind es die Faktoren x^n, die den eben beschriebenen Einfluß haben, für $x \to 1 - 0$ aber gegen 1 steigen. Am deutlichsten ist dies Prinzip zur Grundlage des folgenden

[1] Das B_r-Verfahren, $(r > 1)$, ist aber nicht für jede Folge (s_n) günstiger als das B-Verfahren. Vielmehr gibt es Folgen (s_n), die zwar B-, aber nicht B_2-limitierbar sind.

Verfahrens gemacht[1]. Es sei die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n x + 1)}{n!} a_n$$

für $0 \leqq x < 1$ konvergent. Strebt dann die daselbst durch sie definierte Funktion für $x \to 1 - 0$ einem Grenzwert s zu, so soll $\sum a_n$ etwa R-summierbar genannt werden mit dem Werte s.

Die Methode ist aber analytisch weniger leicht zugänglich und darum von geringerer Bedeutung.

10. Allgemeine Formen der Limitierungsverfahren. Man wird bemerkt haben, daß alle bisher beschriebenen Verfahren im wesentlichen auf zwei Arten zustande kommen:

1. Bei der ersten Art wird aus einer Folge (s_n) mit Hilfe einer *Matrix* (vgl. den Satz von TOEPLITZ **221**)

$$T = (a_{kn})$$

durch Komposition der Folge $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ mit den aufeinanderfolgenden Zeilen $a_{k0}, a_{k1}, \ldots, a_{kn}, \ldots$ die *neue Folge* der Zahlen

$$s'_k = a_{k0} s_0 + a_{k1} s_1 + \cdots + a_{kn} s_n + \cdots, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

gebildet, — wobei natürlich vorausgesetzt werden muß, daß hier auf der rechten Seite ein bestimmter Wert, also eine (im alten Sinne) konvergente Reihe steht[2]. Die Folge $s'_0, s'_1, \ldots, s'_k, \ldots$ nennen wir kurz die *T-Transformation*[3] der Folge (s_n) und bezeichnen, wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, ihr n^{tes} Glied auch kurz mit $T(s_n)$. Ist nun die gestrichene Folge (s'_k) konvergent mit dem Grenzwerte s, *so wird die gegebene Folge* ***T-limitierbar*** *zum Werte* s genannt. In Zeichen:

$$T\text{-}\lim s_n = s \quad \text{oder} \quad T(s_n) \to s.$$

---

[1] LE ROY: Sur les séries divergentes, Annales de la Fac. des sciences de Toulouse (2), Bd. 2, S. 317. 1900.

[2] Hat jede Zeile der Matrix T nur endlich viele Glieder — man nennt sie dann *zeilenfinit* —, so ist diese Voraussetzung von selbst erfüllt. Dies ist bei den Verfahren 1, 2, 3, 5 der Fall.

[3] Die Reihe $\sum a'_k$, deren Teilsummen die s'_k sind, wird man entsprechend die T-Transformation der Reihe $\sum a_n$ mit den Teilsummen s_n nennen. So ist z. B. die Reihe

$$a_0 + \frac{a_1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{a_1 + 2 a_2 + \cdots + n a_n}{n(n+1)} + \cdots$$

die C_1-Transformation der Reihe $\sum a_n$. Bei dieser Auffassung liefern alle T-Verfahren mehr oder weniger bemerkenswerte Reihentransformationen, die sehr häufig für die *numerischen Berechnungen* von Vorteil sein können. (Letzteres ist besonders bei dem E-Verfahren der Fall.) Natürlich kann man auch die Reihentransformation als das *Primäre* ansehen und von ihr zur Transformation der Folge der Teilsummen übergehen. So wurden wir ja gerade auf das E-Verfahren hingeführt.

Man sieht sofort, daß die Verfahren 1, 2, 3, 5 und das in 6 zuerst beschriebene unter diesen Typus fallen. Sie unterscheiden sich nur durch die Wahl der Matrix T. Der Satz **221**, 2 sagt uns dann auch sofort, bei welchen Matrizen wir sicher sind, daß das damit angesetzte T-Verfahren die Permanenzbedingung erfüllt[1].

2. Bei der zweiten Art wird aus einer Folge (s_n) mit Hilfe einer *Funktionenfolge*

$$(\varphi_n) \equiv \varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \ \ldots, \quad \varphi_n(x), \ \ldots$$

durch Komposition die *Funktion*

$$F(x) = \varphi_0(x)\, s_0 + \varphi_1(x)\, s_1 + \cdots + \varphi_n(x)\, s_n + \cdots$$

gebildet, — wobei wir etwa annehmen, daß eine jede der Funktionen $\varphi_n(x)$ für alle $x > x_0$ definiert ist und daß für jedes solche x die Reihe $\sum \varphi_n(x)\, s_n$ konvergiert. Dann ist auch $F(x)$ für alle $x > x_0$ definiert, und wir können nach dem Grenzwert

$$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$

fragen. Ist er vorhanden und $= s$, *so soll die Folge* (s_n) *nun* ***φ-limitierbar***[2] *heißen zum Werte s.*

In Analogie zu **221**, 2 wird man sofort Bedingungen angeben können, unter denen ein solches Verfahren die Permanenzbedingung erfüllen wird. Das wird sicher der Fall sein, wenn a) für jedes feste n

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi_n(x) = 0$$

ist, wenn es b) eine Konstante K gibt, so daß für alle $x > x_0$ und alle n

$$|\varphi_0(x)| + |\varphi_1(x)| + \cdots + |\varphi_n(x)| < K$$

bleibt und wenn c) für $x \to +\infty$

$$\lim \left(\sum \varphi_n(x)\right) = 1$$

ist. Man sieht, daß die Bedingungen genau den Voraussetzungen a), b) und c) des Satzes **221**, 2 entsprechen[3]. Den ganz analog vorgehenden Beweis dürfen wir daher wohl dem Leser überlassen.

---

[1] Die Bedeutung des Satzes **221**, 2 liegt vor allem darin, daß die bei ihm gemachten Voraussetzungen a), b), c) nicht nur *hinreichend*, sondern sogar *notwendig* für seine allgemeine Gültigkeit sind. Wir können darauf nicht näher eingehen (s. S. 75, Fußnote 1), bemerken aber, daß auf Grund dieser Tatsache diejenigen T-Verfahren, deren Matrix die genannten Voraussetzungen erfüllt, die *einzigen* sind, die der Permanenzbedingung genügen.

[2] Dies ist im wesentlichen das Schema, unter dem O. Perron (Beiträge zur Theorie der divergenten Reihen, Math. Zschr. Bd. 6, S. 286—310. 1920) die Summierungsverfahren zusammenfaßt.

[3] Sie sind gleich diesen nicht nur *hinreichend*, sondern sogar *notwendig* für die allgemeine Gültigkeit des Satzes. Näheres hierüber bei H. Raff: Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen. Math. Z. Bd. 41, S. 605—629. 1936

Unter dies Schema fällt unmittelbar das BORELsche Verfahren mit $\varphi_n(x) = e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!}$. Das Gleiche erkennt man auch für das ABELsche Verfahren, wenn man zuvor das bei diesem benutzte Intervall $0 \ldots 1$ in das Intervall $0 \ldots +\infty$ verwandelt, also statt der Reihe $(1-x)\sum s_n x^n$ die Reihe

$$F(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$$

ansetzt und für $x \to +\infty$ untersucht. — In ähnlich einfacher Weise erkennt man, daß auch das Verfahren von LE ROY unter dieš Schema fällt.

Die an zweiter Stelle beschriebene Art von Limitierungsverfahren umfaßt natürlich die erste, die man erhält, wenn man x nur die ganzen Zahlen $\geqq 0$ durchlaufen läßt $(\varphi_n(k) = a_{kn})$. Es ist eben nur das eine Mal ein kontinuierlicher, das andere Mal ein diskontinuierlicher Parameter benutzt. Umgekehrt kann man auch gemäß § 19, Def. 4a den kontinuierlichen Grenzübergang durch einen diskontinuierlichen ersetzen, also die φ-Verfahren unter die T-Verfahren subsumieren. Doch stiften diese Bemerkungen wenig Nutzen; in den weiteren Untersuchungsmethoden bleiben die Verfahren beiderlei Art doch wesentlich verschieden.

Es ist nun nicht unsere Absicht, die Gesamtheit der hiernach in Betracht kommenden Verfahren unter den angedeuteten allgemeinen Gesichtspunkten zu untersuchen. Nur die folgenden Bemerkungen mögen hier Platz finden: Welche Voraussetzungen die Matrix T bzw. die Funktionenfolge (φ_n) erfüllen muß, damit das darauf gegründete Limitierungsverfahren die Permanenzbedingung **263**, I erfüllt, hatten wir schon oben hervorgehoben. Ob auch die Forderungen **263**, II und III erfüllt sind, wird von weiteren Annahmen über die Matrix T bzw. die Folge (φ_n) abhängen; diese Frage überläßt man daher vorteilhafter der Einzeluntersuchung. Auch die Prüfung, in welchem Ausmaße die Forderungen F (**264**) erfüllt sind, wird man nicht generell in Angriff nehmen können, sondern bei jedem Verfahren einzeln anstellen müssen. Nur eine wichtige Eigenschaft ist allen T- und φ-Verfahren gemeinsam, ihr *linearer Charakter*: Sind zwei Folgen (s_n) und (t_n) nach ein und demselben dieser Verfahren limitierbar zu den Werten s und t, so ist auch die Folge $(as_n + bt_n)$ für Konstante a und b nach diesem Verfahren limitierbar, und zwar zum Werte $as + bt$. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Struktur der Verfahren. Auf Grund dieses Satzes bleiben die einfachsten Regeln über das Rechnen mit konvergenten Zahlenfolgen (gliedweise Addition einer Konstanten, gliedweise Multiplikation mit einer solchen, gliedweise Addition oder Subtraktion zweier Folgen) formal erhalten. Dagegen betonen wir ausdrücklich, daß der Satz über den Einfluß endlich vieler Änderungen (**42**, 7) *nicht* erhalten zu bleiben braucht[1].

Wollten wir nun einen einigermaßen vollständigen Überblick über den gegenwärtigen Stand der Theorie der divergenten Reihen geben, so müßten wir jetzt in eine genaue Untersuchung der beschriebenen Verfahren eintreten. Diese hätte sich zunächst darauf zu beziehen, ob und inwieweit die einzelnen Verfahren nun doch den Forderungen **263**, II, III und **264** genügen; sie hätte notwendige und hinreichende Kriterien dafür anzugeben, daß eine Reihe durch ein bestimmtes dieser Verfahren summiert werden kann; sie hätte die Beziehungen aufzudecken, die zwischen den Wirkungsweisen der verschiedenen Verfahren bestehen, hätte ferner die allgemeinen in Nr. 10 angedeuteten Gesichtspunkte zu vertiefen, u. v. a. m. Auf alles das einzugehen verbietet natürlich der Raum. Wir müssen uns damit begnügen, einige der Verfahren — wir wählen das H-, C-, A- und E-Verfahren — genauer zu untersuchen. Dabei werden wir die Auswahl der Gegenstände so treffen, daß möglichst alle Fragestellungen und ebenso alle Beweismethoden wenigstens angedeutet werden können, die in der gesamten Theorie eine Rolle spielen.

266. Im übrigen müssen wir auf die Originalliteratur verweisen, aus der, außer den in den Fußnoten dieses und der folgenden Paragraphen genannten Arbeiten, noch die folgenden Stellen aufgeführt seien:

1. Über den allgemeinen Problemenkreis orientieren

Borel, É.: Leçons sur les séries divergentes, 2. Aufl. Paris 1928.

Bromwich, T. J. I'A.: An introduction to the theory of infinite series. London 1908.

Hardy, G. H., and S. Chapman: A general view of the theory of summable series. Quarterly Journ. Bd. 42, S. 181. 1911.

Chapman, S: On the general theory of summability, with applications to Fourier's and other series. Ebenda Bd. 43, S. 1. 1911.

Carmichael, R. D.: General aspects of the theory of summable series. Bull. of the American Math. Soc. Bd. 25, S. 97—131. 1919.

---

[1] Hierfür gab G. H. Hardy zuerst das folgende einfache Beispiel, das sich auf das B-Verfahren bezieht: Die Folge s_n sei durch die Entwicklung

$$\sin(e^x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$$

definiert. Wegen $e^{-x} \cdot \sin(e^x) \to 0$ für $x \to +\infty$ ist also die Folge $s_0, s_1, s_2, \ldots$ B-limitierbar zum Werte 0. Durch Differentiation der angesetzten Gleichung erhält man

$$\cos(e^x) = e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1} \frac{x^n}{n!};$$

und dies lehrt, da $\cos(e^x)$ für $x \to +\infty$ keinem Grenzwert zustrebt, daß die Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *nicht* B-limitierbar ist!!

KNOPP, K.: Neuere Untersuchungen in der Theorie der divergenten Reihen. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. Bd. 32, S. 43—67. 1923.

2. Eine eingehendere Untersuchung des in den folgenden Paragraphen *nicht* genauer behandelten $R_{\mu k}$-Verfahrens geben

HARDY, G. H., and M. RIESZ: The general theory of Dirichlet's series. Cambridge 1915.

Ebenso ist das B-Verfahren außer in den unter 1. genannten Büchern von BOREL und BROMWICH eingehender behandelt in

HARDY, G. H.: The application to Dirichlet's series of Borel's exponential method of summation. Proceedings of the Lond. Math. Soc. (2) Bd. 8, S. 301 bis 320. 1909.

HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: The relations between Borel's and Cesàro's methods of summation. Ebenda (2) Bd. 11, S. 1—16. 1913.

HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Contributions to the arithmetic theory of series. Ebenda (2) Bd. 11, S. 411—478. 1913.

HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method. Rend. del Circolo Mat. di Palermo Bd. 41, S. 36—53. 1916.

DOETSCH, G.: Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie. Inaug.-Diss., Göttingen 1920.

3. Ein ausführliches Referat über die Theorie der divergenten Reihen findet man außer in den unter 1. genannten Arbeiten noch in

BIEBERBACH, L.: Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen. Enzyklop. d. math. Wissensch. Bd. II, Teil C, Heft 4. 1921.

4. Die allgemeinen Fragen endlich der Klassifikation der Limitierungsverfahren behandeln die folgenden Arbeiten:

PERRON, O.: Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. Math. Zeitschr. Bd. 6, S. 286—310. 1920.

HAUSDORFF, F.: Summationsmethoden und Momentenfolgen I und II. Math. Zeitschr. Bd. 9, S. 74ff. und S. 280ff. 1920.

KNOPP, K.: Zur Theorie der Limitierungsverfahren. Math. Zeitschr. Bd. 31; 1. Mitteilung S. 97—127, 2. Mitteilung S. 276—305. 1929.

§ 60. Das C- und H-Verfahren.

Unter allen Summierungsverfahren, die wir im vorangehenden kurz angegeben haben, sind die C- und H-Verfahren — und besonders die bei beiden identische Limitierung durch arithmetische Mittel erster Ordnung — durch ihre große Einfachheit ausgezeichnet; auch haben sie sich für die mannigfachsten Anwendungen als sehr bedeutungsvoll erwiesen. Wir wollen daher zunächst auf diese Verfahren etwas näher eingehen.

Für die H-Verfahren lehrte schon der CAUCHYsche Satz **43**, 2, daß für $p \geqq 1$ aus $h_n^{(p-1)} \to s$ auf $h_n^{(p)} \to s$ geschlossen werden kann[1], daß also das Wirkungsfeld der H_p-Limitierung dasjenige der H_{p-1}-Limitierung umfaßt. Das Entsprechende gilt auch für die C-Verfahren:

[1] Vgl. S. 482, Fußnote 1. Als 0^{te} Stufe einer Transformation, bei der höhere Stufen eingeführt sind, soll also die ursprüngliche Folge verstanden werden.

267. **Satz 1.** *Ist eine Folge C_{k-1}-limitierbar zum Werte s, ($k \geqq 1$), so ist sie auch C_k-limitierbar zum gleichen Werte s.* In Zeichen: *Aus $c_n^{(k-1)} \to s$ folgt stets $c_n^{(k)} \to s$. (Permanenzsatz der C-Verfahren.)*

Beweis. Definitionsgemäß ist (s. **265**, 3)

$$c_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} = \frac{S_0^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)}}{\binom{k-1}{k-1} + \cdots + \binom{n+k-1}{k-1}} = \frac{\binom{k-1}{k-1} c_0^{(k-1)} + \cdots + \binom{n+k-1}{k-1} c_n^{(k-1)}}{\binom{k-1}{k-1} + \cdots + \binom{n+k-1}{k-1}},$$

woraus nach **44**, 2 unmittelbar die Behauptung folgt.

Hiernach entspricht jeder Folge, die für einen passenden Index p überhaupt C_p-limitierbar ist, eine *bestimmte* (ganze) Zahl k derart, daß die Folge zwar C_k-, aber nicht C_{k-1}-limitierbar ist. (Ist die Folge von vornherein konvergent, so setzen wir natürlich $k = 0$.) Wir sagen dann, die Folge sei *genau* von der k^{ten} Ordnung limitierbar.

268. Beispiele für C_k-Limitierung[1].

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ist C_1-summierbar zum Werte $\frac{1}{2}$. Beweis s. o. **262**.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k}{k}$ ist genau C_{k+1}-summierbar zum Werte $s = \frac{1}{2^{k+1}}$.

Denn für $a_n \equiv (-1)^n \binom{n+k}{k}$ ist nach **265**, 3

$$\sum S_n^{(k)} x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{k+1} \cdot \sum (-1)^n \binom{n+k}{k} x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{1+x}\right)^{k+1}$$

$$= \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{k+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} x^{2\nu}.$$

Es ist also

$$S_n^{(k)} = \binom{\nu+k}{k} \text{ oder } = 0, \text{ je nachdem } n = 2\nu \text{ oder } = 2\nu + 1 \text{ ist.}$$

Folglich ist für $n = 2\nu$ *und* $n = 2\nu + 1$

$$S_n^{(k+1)} = \binom{k}{k} + \binom{1+k}{k} + \cdots + \binom{\nu+k}{k} = \binom{\nu+k+1}{k+1},$$

woraus man nun sofort die Behauptung ablesen kann.

3. Die Reihe $\sum (-1)^n (n+1)^k \equiv 1 - 2^k + 3^k - 4^k + - \cdots$, die für $k = 0$ nach dem 1. Beispiel C_1-summierbar ist zum Werte $\frac{1}{2}$, ist für $k \geqq 1$ genau C_{k+1}-summierbar zur Summe $s = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} B_{k+1}$, wenn B_ν die ν^{te} Bernoullische Zahl bedeutet. Die *Tatsache* der Summierbarkeit folgt nämlich ohne weiteres aus dem 2. Beispiel. Denn bezeichnet man für den Augenblick die dort sum-

[1] Auf Grund des gleich nachher bewiesenen Äquivalenzsatzes gelten diese Beispiele unverändert auch für die H_k-Limitierungen. Wegen der in **265**, 3 gegebenen expliziten Formeln für die $S_n^{(k)}$ bzw. $c_n^{(k)}$, denen kein Analogon beim H-Verfahren zur Seite steht, wird diesem das C-Verfahren gewöhnlich vorgezogen.

mierten Reihen mit Σ_k, so erkennt man wegen des linearen Charakters unserer Verfahren (s. S. 493) sofort, daß auch jede aus den Σ_k durch gliedweise Addition entstandene Reihe der Form $c_0 \Sigma_0 + c_1 \Sigma_1 + \dots + c_k \Sigma_k$ genau C_{k+1}-summierbar ist, falls $c_0, c_1, \dots, c_k$ irgendwelche Konstanten bedeuten und $c_k \neq 0$ ist. Man kann nun offenbar die c_ν so wählen, daß man gerade die Reihe $\sum (-1)^n (n+1)^k$ erhält. — Der Wert s errechnet sich am leichtesten durch A-Summierung; s. **288**, 1.

4. Die Reihe $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx + \cdots$ ist C_1-summierbar mit der Summe 0, falls $x \neq 2k\pi$ ist.

Beweis. Nach **201** ist für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$s_n = \tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

und also

$$s_0 + s_1 + \cdots + s_n = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + \sin 3\frac{x}{2} + \cdots + \sin(2n+1)\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin^2 (n+1)\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

und folglich

$$\left|\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}\right| \leqq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Bei festem $x \neq 2k\pi$ strebt aber der letzte Quotient mit wachsendem n gegen 0, womit schon alles bewiesen ist. — Hier haben wir ein erstes Beispiel einer summierbaren Reihe mit veränderlichen Gliedern. Die durch ihre „Summe" dargestellte Funktion ist $\equiv 0$ in jedem Intervall, das keinen der Punkte $2k\pi$ enthält. In den ausgeschlossenen Punkten ist die Reihe *bestimmt divergent* gegen $+\infty$!

5. Die Reihe $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots$ ist für $x = k\pi$ ersichtlich konvergent mit der Summe 0. Für $x \neq k\pi$ ist sie nicht mehr konvergent, wohl aber C_1-summierbar, und ihre „Summe" ist dann[1] $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, was mit der Gleichung übereinstimmen würde, die aus **214** durch eine (nicht erlaubte) gliedweise Differentiation sich ergäbe.

Beweis. Es ist $s_n = \sin x + \cdots + \sin nx = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$, woraus dann ähnlich wie in 4 der Beweis folgt.

6. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots$ ist C_1-summierbar mit der Summe 0, falls $x \neq k\pi$ ist.

7. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots$ ist ebenfalls C_1-summierbar und hat die Summe $\frac{1}{2\sin x}$, falls $x \neq k\pi$ ist.

8. $1 + z + z^2 + \cdots$ ist für $|z| = 1$ noch C_1-summierbar mit der Summe $\frac{1}{1-z}$, falls nur $z \neq +1$ ist. (Die Beispiele 4 und 5 ergeben sich hieraus durch Trennung von Reellem und Imaginärem.) Denn es ist hier

$$s_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}, \quad \text{also} \quad \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{z(1 - z^{n+1})}{(1-z)^2},$$

woraus die Behauptung schon abgelesen werden kann.

[1] Das Bild dieser Funktion weist also an den Stellen $2k\pi$ „unendlich große Sprünge" auf.

9. Die Reihe für $\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n$ ist für $|z| = 1$ noch C_k-summierbar mit der Summe $\frac{1}{(1-z)^k}$, falls nur $z \neq +1$ ist. Denn die zugehörigen Größen $S_n^{(k)}$ sind nach **265**, 3 die Koeffizienten von x^n in der Entwicklung von

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \cdot \frac{1}{(1-xz)^k} = \frac{a}{(1-x)^{k+1}} + \cdots,$$

bei der auf der rechten Seite die Partialbruchzerlegung der linken Seite angedeutet sein soll. Alle auf den hingeschriebenen Bruch folgenden Partialbrüche haben höchstens die k^{te} Potenz von $(1-x)$ oder $(1-xz)$ im Nenner. Für a findet man daher durch Multiplikation mit $(1-x)^{k+1}$ für $x \to 1$ sofort den Wert $a = \frac{1}{(1-z)^k}$. Daher ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1-z)^k} \binom{n+k}{k} + \cdots\right] x^n,$$

und hierbei genügt es, von den in der eckigen Klammer noch zu ergänzenden endlich vielen Gliedern zu wissen, daß der in ihnen auftretende Binomialkoeffizient bezüglich n höchstens die Ordnung n^{k-1} hat. Daher strebt für $n \to +\infty$

$$\frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} \to \frac{1}{(1-z)^k}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Da das H-Verfahren mit dem C-Verfahren äußerlich eine gewisse Verwandtschaft aufweist, so liegt die Frage nahe, ob sich beide in ihrer Wirksamkeit unterscheiden oder nicht. Wir werden sehen, daß ihre Wirkungsfelder völlig miteinander identisch sind, denn es gilt der folgende vom Verfasser[1] und W. SCHNEE[2] herrührende

269. **Satz 2.** *Ist eine Folge (s_n) für ein bestimmtes k H_k-limitierbar*[3] *zum Werte s, so ist sie für dieses k auch C_k-limitierbar zum gleichen Werte s, und umgekehrt. In Zeichen: Aus*

$$h_n^{(k)} \to s \quad \textit{folgt stets} \quad c_n^{(k)} \to s$$

und umgekehrt. (*Äquivalenzsatz des C- und H-Verfahrens.*)

Für diesen Satz sind viele Beweise gegeben worden[4], unter denen

---

[1] Vgl. die S. 483, Fußnote 3 genannte Arbeit.

[2] SCHNEE, W.: Die Identität des CESÀROschen und HÖLDERschen Grenzwertes. Math. Ann. Bd. 67, S. 110—125. 1909.

[3] Da für $k = 1$ der Satz trivial ist, darf für das Folgende $k \geq 2$ gedacht werden.

[4] Ausführliche Literaturangaben über diesen Satz und seine zahlreichen Beweise findet man in den Arbeiten des Verfassers: 1. Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit. Math. Zeitschr. Bd. 19, S. 97—113. 1923. 2. Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren, ebenda Bd. 47, S. 229—264. 1941. 3. Über eine Erweiterung des Äquivalenzsatzes der C- und H-Verfahren und eine Klasse regulär wachsender Funktionen, ebenda Bd. 49, S. 219—255. 1943.

wohl derjenige von I. SCHUR[1] am durchsichtigsten und dem Wesen des Problems am besten angepaßt ist. In Verbindung mit einer geschickten Wendung von A. F. ANDERSEN[2] wird er besonders einfach.

Wir zeigen zunächst, daß der Äquivalenzsatz in dem folgenden, einfacher erscheinenden Satze enthalten ist:

Satz 2a. *Ist* (z_n) *eine beliebige Folge, die* C_k*-limitierbar ist* $(k \geqq 1)$ **270.**
zum Werte ζ, *so ist die Folge der arithmetischen Mittel* $z'_n = \frac{z_0 + z_1 + \cdots + z_n}{n+1}$ *schon* C_{k-1}*-limitierbar zum Werte* ζ *und umgekehrt.*

Nach diesem Satze wäre in der Tat jede der k Beziehungen

$$\begin{aligned} c_n^{(k)} \equiv C_k(s_n) &\to s \\ C_{k-1}(h'_n) &\to s \\ \cdots\cdots\cdots& \\ C_2(h_n^{(k-2)}) &\to s \\ C_1(h_n^{(k-1)}) \equiv h_n^{(k)} &\to s \end{aligned}$$

eine Folge der übrigen, insbesondere die erste eine Folge der letzten und umgekehrt. Das ist aber der Inhalt des Äquivalenzsatzes.

Es genügt also, den Satz 2a zu beweisen. Dieser ist seinerseits unmittelbar aus den folgenden beiden Relationen abzulesen, die die C_k- bzw. C_{k-1}-Transformationen der beiden Folgen (z_n) und (z'_n) miteinander in Verbindung setzen:

$$\text{(I)} \qquad C_k(z_n) = k\, C_{k-1}(z'_n) - (k-1)\, C_k(z'_n),$$

$$\text{(II)} \qquad C_{k-1}(z'_n) = \frac{1}{k}\, C_k(z_n) + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{C_k(z_0) + C_k(z_1) + \cdots + C_k(z_n)}{n+1}.$$

Strebt nämlich *erstlich* $C_{k-1}(z'_n) \to \zeta$, so strebt nach Satz 1 auch $C_k(z'_n) \to \zeta$. Nach der Beziehung (I) strebt also

$$C_k(z_n) \to k\zeta - (k-1)\,\zeta = \zeta.$$

Strebt aber *umgekehrt* $C_k(z_n) \to \zeta$, so streben nach **43**, 2 auch die arithmetischen Mittel

$$\frac{C_k(z_0) + C_k(z_1) + \cdots + C_k(z_n)}{n+1} \to \zeta,$$

---

[1] SCHUR, I.: Über die Äquivalenz der CESÀROschen und HÖLDERschen Mittelwerte. Math. Ann. Bd. 74, S. 447—458. 1913, sowie: Einige Bemerkungen zur Theorie der unendlichen Reihen, Sitzber. d. Berl. Math. Ges., Jahrg. 29, S. 3—13. 1929.

[2] ANDERSEN, A. F.: Bemerkung zum Beweis des Herrn KNOPP für die Äquivalenz der CESÀRO- und HÖLDER-Summabilität. Math. Zeitschr. Bd. 28, S. 356 bis 359. 1928.

und die Beziehung (II) liefert nun ebenso einfach, daß auch

$$C_{k-1}(z'_n) \to \frac{1}{k}\zeta + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\zeta = \zeta$$

strebt[1].

Hiernach kommt alles auf die Verifikation der beiden Beziehungen (I) und (II) hinaus, die man etwa folgendermaßen durchführen kann:

In **265**, 3 wurden zur Definition der C_k-Transformation einer Folge (s_n) die iterierten Summen $S_n^{(k)}$ gebildet. Für diese werde jetzt etwas genauer $S_n^{(k)}(s)$ geschrieben, und eine entsprechende Bezeichnung werde benutzt, wenn von andern Zahlenfolgen ausgegangen wird. Aus der Identität

$$\frac{1}{(1-y)^k}\sum_{n=0}^{\infty} z_n y^n = \frac{1}{(1-y)^{k-1}}\sum_{n=0}^{\infty}(z_0 + z_1 + \cdots + z_n)\, y^n$$
$$= \frac{1}{(1-y)^{k-1}}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, z'_n y^n$$

folgt dann, daß

$$S_n^{(k)}(z) = \binom{n+k-2}{k-2} 1\cdot z'_0 + \cdots + \binom{n+k-2-\nu}{k-2}(\nu+1)\, z'_\nu + \cdots$$
$$+ \binom{k-2}{k-2}(n+1)\, z'_n$$

ist. Setzt man hierin

$$\nu + 1 = (n+k) - (n+k-1-\nu)$$

und beachtet, daß

$$\binom{n+k-2-\nu}{k-2}(n+k-1-\nu) = (k-1)\binom{n+k-1-\nu}{k-1}$$

ist, so folgt weiter

$$(*) \qquad S_n^{(k)}(z) = (n+k)\, S_n^{(k-1)}(z') - (k-1)\, S_n^{(k)}(z').$$

Durch Division mit $\binom{n+k}{k}$ ergibt sich hieraus unmittelbar die Beziehung (I).

Andrerseits ist nach Definition der Größen $S_n^{(k)}$

$$S_n^{(k-1)} = S_n^{(k)} - S_{n-1}^{(k)}, \qquad (n = 0, 1, \ldots;\ S_{-1}^{(k)} = 0).$$

---

[1] Bedeutet M die Bildung der arithmetischen Mittel einer Folge, so lassen sich die obigen Beziehungen I und II noch kürzer und prägnanter in der Form

$$\text{(I)} \qquad C_k = k\, C_{k-1} M - (k-1)\, C_k M,$$
$$\text{(II)} \qquad C_k = k\, C_{k-1} M - (k-1)\, M\, C_k$$

schreiben, von denen die eine aus der andern hervorgeht, sobald man weiß, daß die C_k-Transformation und die Bildung der arithmetischen Mittel zwei *vertauschbare* Operationen sind.

Setzt man dies in (*) ein, so erhält man

$$(^{**}) \qquad S_n^{(k)}(z) = (n+1)\, S_n^{(k)}(z') - (n+k)\, S_{n-1}^{(k)}(z')$$

und hieraus durch Division mit $\binom{n+k}{k}$

$$C_k(z_n) = (n+1)\, C_k(z'_n) - n\, C_k(z'_{n-1}).$$

Setzt man hier für n der Reihe nach $0, 1, \ldots, n$ ein und addiert, so erhält man schließlich

$$\frac{C_k(z_0) + C_k(z_1) + \cdots + C_k(z_n)}{n+1} = C_k(z'_n),$$

was in Worten besagt, daß die arithmetischen Mittel der C_k-Transformation einer Folge gleich der C_k-Transformation ihrer arithmetischen Mittel sind, daß also, wie man kurz sagt, die C_k-Transformation und die Bildung der arithmetischen Mittel zwei *vertauschbare* Operationen sind[1].

Setzt man aber in (I) für $C_k(z'_n)$ den eben gewonnenen neuen Ausdruck ein, so erhält man unmittelbar die Beziehung (II). Damit ist der Beweis des Äquivalenzsatzes vollendet.

Nachdem so die völlige Äquivalenz zwischen dem C- und dem H-Verfahren festgestellt ist, brauchen wir uns nur noch mit einem von beiden zu beschäftigen. Da sich das C-Verfahren wegen der expliziten Formeln **265**, 3 für die $S_n^{(k)}$ rechnerisch leichter handhaben läßt, so pflegt man dieses zu bevorzugen.

Wir fragen nun zunächst nach der *Ausdehnung seines Wirkungsfeldes*, also nach den notwendigen Bedingungen, die eine Folge erfüllen muß, wenn sie C_k-limitierbar sein soll. Drücken wir, wie es durch E. Landau allgemein üblich geworden ist, durch die Gleichung $x_n = O(n^\alpha)$, α reell, aus, daß die Folge $\left(\frac{x_n}{n^\alpha}\right)$ *beschränkt* ist, und durch die Gleichung $x_n = o(n^\alpha)$, daß die Folge $\left(\frac{x_n}{n^\alpha}\right)$ eine *Nullfolge* ist[2], so kann man den folgenden Satz beweisen, welcher etwa besagt, daß Folgen mit gar zu stark anwachsenden Gliedern für die C-Limitierung nicht mehr in Betracht kommen:

Satz 3. *Ist $\sum a_n$ mit den Teilsummen s_n eine C_k-summierbare Reihe, so ist* **271.**

$$a_n = o(n^k) \qquad \text{und für } k \geqq 1 \text{ auch} \qquad s_n = o(n^k).$$

Beweis. Für $k = 0$ ist die Behauptung schon durch den Satz **82**, 1 bewiesen, um dessen Verallgemeinerung es sich hier handelt. Für

[1] Vgl. die letzte Fußnote.

[2] Das erste besagt also etwa, daß die $|x_n|$ *höchstens* von derselben Ordnung, wie konst. $\cdot\, n^\alpha$, das zweite, daß sie von *kleinerer* Ordnung als n^α sind.

$k \geqq 1$ ist mit den Bezeichnungen von **265**, 3 die Folge der Zahlen

$$\frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} = \frac{S_0^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)}}{\binom{n+k}{k}}$$

konvergent. Mit dem gleichen Grenzwert konvergiert dann wegen $\binom{n+k-1}{k} \cong \binom{n+k}{k}$ auch die Folge

$$\frac{S_0^{(k-1)} + \cdots + S_{n-1}^{(k-1)}}{\binom{n+k}{k}},$$

so daß die Differenz beider Quotienten, also $S_n^{(k-1)} : \binom{n+k}{k}$, eine Nullfolge bildet. Es ist also wegen $\binom{n+k}{k} \sim n^k$ zunächst $S_n^{(k-1)} = o(n^k)$. Dann ist auch

$$S_n^{(k-2)} = S_n^{(k-1)} - S_{n-1}^{(k-1)} = o(n^k) + o(n^k) = o(n^k)$$

und ebenso[1]

$$S_n^{(k-3)} = o(n^k), \quad \ldots, \quad S_n' = o(n^k), \quad s_n = o(n^k), \quad a_n = o(n^k).$$

Das soeben beim Beweise erhaltene Zwischenergebnis, daß auch $S_n^{(k-1)} = o(n^k)$ ist, läßt sich als eine noch prägnantere Verallgemeinerung des Satzes **82**, 1 deuten. In der Tat besagt es, daß

$$\frac{\binom{n+k-1}{k-1} a_0 + \binom{n+k-2}{k-1} a_1 + \cdots + \binom{k-1}{k-1} a_n}{\binom{n+k}{k}} \to 0$$

strebt. Wir haben also das folgende schöne Analogon zu **82**, 1:

272. **Satz 4.** *Bei einer C_k-summierbaren Reihe $\sum a_n$ muß notwendig*

$$C_k\text{-}\lim a_n = 0$$

sein.

Aber sogar der KRONECKERsche Satz **82, 3** hat hier sein genaues Analogon, bei dem wir uns indessen auf den Fall $p_n = n$ beschränken wollen:

273. **Satz 5.** *Bei einer C_k-summierbaren Reihe $\sum a_n$ muß notwendig*

$$C_k\text{-}\lim \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n+1} = 0$$

sein.

---

[1] Die sehr einfachen, hier und im folgenden benutzten Rechenregeln für die Ordnungssymbole O und o wird sich der Leser ganz leicht selbst zurechtlegen können.

In der Tat folgt nach dem Zusatz zu **270** aus $C_k(s_n) \to s$ zunächst, daß $C_{k-1}\left(\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\right) \to s$, und folglich nach dem Permanenzsatz, daß auch $C_k\left(\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\right) \to s$ strebt. Subtrahiert man dies von $C_k(s_n) \to s$, so folgt unmittelbar die Behauptung

$$C_k\text{-}\lim\left(s_n - \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\right) = C_k\text{-}\lim \frac{a_1+2a_2+\cdots+n a_n}{n+1} = 0.$$

Durch diese einfachen Sätze ist das Wirkungsfeld des C_k-Verfahrens sozusagen *nach außen* abgesteckt, denn sie sagen etwas darüber aus, wie weit sich das Wirkungsfeld *höchstens* in das Gebiet der divergenten Reihen hinein erstreckt. Sehr viel feiner ist die Frage, wo dies Wirkungsfeld im eigentlichen Sinne *beginnt*. Damit ist dies gemeint: Jede im gewöhnlichen Sinne zum Werte s konvergente Reihe ist auch C_k-summierbar (und zwar für jedes $k \geqq 0$) zum gleichen Werte s. Wo liegt nun innerhalb der Gesamtheit aller C_k-summierbaren Reihen die Scheidelinie zwischen den konvergenten und den divergenten Reihen? Darüber gilt zunächst der folgende einfache, sich nur auf das C_1-Verfahren beziehende

Satz 6. *Ist die Reihe* $\sum a_n$ *C_1-summierbar zur Summe s und strebt* 274.
$\delta_n = \frac{a_1+2a_2+\cdots+n a_n}{n+1} \to 0$, *so ist* $\sum a_n$ *sogar konvergent mit der Summe s.* Denn es ist (s. o.)

$$s_n - \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1} = \frac{a_1+2a_2+\cdots+n a_n}{n+1} = \delta_n,$$

woraus der Beweis der Behauptung abgelesen werden kann[1]. Der letzte Ausdruck strebt insbesondere $\to 0$, wenn $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Sehr viel tiefer liegt die Tatsache, daß es hier schon genügt, wenn $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist:

Satz 6a. *Wenn eine Reihe* $\sum a_n$ *C_k-summierbar ist und wenn ihre Glieder a_n der Bedingung*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

genügen, so ist $\sum a_n$ *sogar konvergent.* (O-$C_k \to K$-Satz[2].)

---

[1] Mit Rücksicht auf **262**, 1 (bzw. **43**, Satz 2) und **82**, Satz 3 kann der Satz auch so ausgesprochen werden: *Eine Reihe Σa_n ist dann und nur dann konvergent, wenn sie C_1-summierbar ist und $\delta_n \to 0$ strebt.*

[2] HARDY, G. H.: Theorems relating to the convergence and summability of slowly oscillating series. Proc. Lond. Math. Soc. (2) Bd. 8, S. 301—320. 1909, Vgl. auch die S. 498, Fußnote 4, genannte Arbeit des Verfassers. — Der Satz schließt von einer C-Summierbarkeit auf die Konvergenz. Wir nennen ihn darum einen $C \to K$-Satz, und zwar genauer, weil die entscheidende Voraussetzung ein O (also die Beschränktheit einer gewissen Zahlenfolge) benutzt, einen O-$C \to K$-Satz. Ein Umkehrsatz dieser Art ist zuerst von A. TAUBER, und zwar

Auf einen Beweis dieses Satzes kann hier verzichtet werden, da er sich als einfaches Korollar aus dem LITTLEWOODschen Satze **287** ergeben wird. Sein direkter Beweis würde nicht wesentlich einfacher sein als der dieses späteren Satzes.

Anwendung. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha i}}$, $\alpha \gtrless 0$, ist *nicht* konvergent, da man nach dem Muster von S. 457, Fußnote 1, leicht bestätigt, daß für $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{n^{1+\alpha i}} = \frac{1}{i\alpha}\left[\frac{1}{n^{i\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{i\alpha}}\right] - \frac{\vartheta_n}{n^2}$$

mit *beschränkten* ϑ_n gesetzt werden kann. Da ferner für unsere Reihe $(n\,a_n)$ beschränkt ist, so kann sie auch von keiner Ordnung C_k-summierbar sein.

In naher Beziehung zum letzten Satze steht der folgende, bei dem wir uns der Einfachheit halber auf die Summierung *erster* Ordnung beschränken wollen.

275. Satz 7. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die C_1-Summierbarkeit der Reihe $\sum a_n$ mit den Teilsummen s_n zur Summe s besteht darin, daß*

(A) *die Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1}$ *konvergiert*

und daß für ihre Reste $\varrho_n = \frac{a_{n+1}}{n+2} + \frac{a_{n+2}}{n+3} + \cdots$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, *die Beziehung*

(B) $$s_n + (n+1)\,\varrho_n \to s$$

besteht[1]. — Bezeichnet man die Teilsummen und die Summe der Reihe (A) mit σ_n und σ, so besagt (B), daß

(B') $$s - s_n - (n+1)(\sigma - \sigma_n) \to 0$$

strebt, daß also die Fehler $(s - s_n)$ bis auf zu 0 abnehmende Unterschiede n-mal so groß sind, wie die Fehler $(\sigma - \sigma_n)$.

---

für das A-Verfahren bewiesen worden (s. **286**); darum bezeichnet HARDY alle Sätze, die von einer Summierbarkeit auf gewöhnliche Konvergenz zurückschließen, als „Tauberian theorems". Wir wollen sie als *Umkehrsätze*, genauer als Limitierungs- oder Mittelungs-Umkehrsätze bezeichnen.

[1] KNOPP, K.: Über die Oszillationen einfach unbestimmter Reihen. Sitzungsber. Berl. Math. Ges., Jg. 16, S. 45—50. 1917.

HARDY, G. H.: A theorem concerning summable series. Proc. Cambridge Philos. Soc. Bd. 20, S. 304—307. 1921.

Ein weiterer Beweis findet sich in der S. 498, Fußnote 4, genannten Arbeit des Verfassers, wieder ein anderer bei G. LYRA: Über einen Satz zur Theorie der C-summierbaren Reihen. Math. Zeitschr. Bd. 45, S. 559—572. 1939. Dieser letzten Arbeit ist der obige Beweis dafür entnommen, daß (A) und (B) für die C_1-Summierbarkeit von $\sum a_n$ *hinreichend* sind.

Beweis. I. *$\sum a_n$ sei C_1-summierbar zum Werte s.* Wegen $a_\nu = s_\nu - s_{\nu-1}$ ist nach **183**

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{a_\nu}{\nu+1} = -\frac{s_n}{n+2} + \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{s_\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{s_{n+p}}{n+p+2}.$$

Wegen $s_\nu = S'_\nu - S'_{\nu-1}$ ist dies nach nochmaliger Anwendung der ABELschen partiellen Summation

$$= -\frac{s_n}{n+2} - \frac{S'_n}{(n+2)(n+3)} +$$

$$+ 2\sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{S'_\nu}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \frac{s_{n+p}}{n+p+2} + \frac{S'_{n+p}}{(n+p+2)(n+p+3)}.$$

Für $n \to \infty$ streben nun, und zwar ohne Rücksicht auf p, alle fünf Teile der rechten Seite einzeln $\to 0$, da wegen der vorausgesetzten C_1-Summierbarkeit von $\sum a_n$ nach Satz 3 $s_n = o(n)$ und $S'_n = O(n)$ ist. Also gilt (A). Gleichzeitig erhalten wir, wenn wir bei festem n jetzt $p \to \infty$ rücken lassen:

$$s_n + (n+2)\varrho_n = -\frac{S'_n}{n+3} + 2(n+2)\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{S'_\nu}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}.$$

Wegen $\frac{S'_n}{n+1} \to s$ strebt dies nach **221** für $n \to \infty$ ebenfalls $\to s$. Folglich gilt, da $\varrho_n \to 0$ geht, auch (B). Also sind (A) und (B) notwendig.

II. Es seien nun umgekehrt die Bedingungen (A) und (B) erfüllt. Setzen wir dann die in (B) linkerhand stehenden Größen $= \tau_n$, so ist zunächst

$$\tau_{n+1} - \tau_n = a_{n+1} + (n+2)\varrho_{n+1} - (n+1)\varrho_n$$
$$= \varrho_n + a_{n+1} + (n+2)(\varrho_{n+1} - \varrho_n) = \varrho_n$$

und also

$$\tau_n = s_n + (n+1)(\tau_{n+1} - \tau_n).$$

Hiernach ist

$$s_n = 2\tau_n - [(n+1)\tau_{n+1} - n\tau_n]$$

und also

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = 2\,\frac{\tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_n}{n+1} - \tau_{n+1}.$$

Wegen $\tau_n \to s$ folgt hieraus aber die zu beweisende C_1-Limitierbarkeit[1] der Folge (s_n) zum Werte s.

Mit diesen allgemeinen Sätzen aus der Theorie der C-Summierung wollen wir uns begnügen[2] und nun noch zu einigen Anwendungen übergehen.

Schon bei den einleitenden Betrachtungen (S. 477/8) hatten wir hervorgehoben, daß das Multiplikationsproblem der unendlichen Reihen,

---

[1] Der Satz läßt sich analog für C_k-Summierbarkeit aufstellen; vgl. die S. 498, Fußnote 4 genannte Arbeit 1 des Verfassers.

[2] Eine recht vollständige Übersicht über die Theorie bietet A. F. ANDERSEN: Studier over Cesàro's Summabilitätsmethode. Kopenhagen 1921, und E. KOGBETLIANTZ: Sommation des séries et integrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques. Mémorial des Sciences math., Fasc. 51. Paris 1931.

das bei ängstlichem Festhalten an dem alten Konvergenzbegriff einen sehr undurchsichtigen und schwierigen Sachverhalt bot, sich durch Zulassung des Summierbarkeitsbegriffes in einfachster Weise erschöpfend erledigen läßt. Denn der zweite Beweis des ABELschen Satzes (S. 331) liefert den

276. **Satz 8.** *Das CAUCHYsche Produkt* $\sum c_n \equiv \sum (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$ *zweier konvergenter Reihen* $\sum a_n = A$ *und* $\sum b_n = B$ *ist stets* C_1*-summierbar zum Werte* $C = A \cdot B$.

Darüber hinausgehend beweisen wir jetzt den folgenden allgemeineren

277. **Satz 9.** *Ist* $\sum a_n$ *eine* C_α*- und* $\sum b_n$ *eine* C_β*-summierbare Reihe mit den Werten* A *bzw.* B (α *und* β *ganzzahlig* $\geqq 0$), *so ist auch ihr CAUCHYsches Produkt* $\sum c_n \equiv \sum (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots a_n b_0)$ *eine spätestens* C_γ*-summierbare Reihe mit dem Werte* $C = A \cdot B$, *wenn* $\gamma = \alpha + \beta + 1$ *gesetzt wird.*

Beweis. Bezeichnen wir die Größen, die bei der allgemeinen Beschreibung **265**, 3 des C-Verfahrens mit $S_n^{(k)}$ bezeichnet wurden, für unsere drei Reihen bezüglich mit $A_n^{(\alpha)}$, $B_n^{(\beta)}$, $C_n^{(\gamma)}$, so ist[1] für $|x| < 1$ wegen $\sum a_n x^n \cdot \sum b_n x^n = \sum c_n x^n$

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \sum a_n x^n \cdot \frac{1}{(1-x)^{\beta+1}} \sum b_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{\gamma+1}} \sum c_n x^n,$$

also nach **265**, 3

$$C_n^{(\gamma)} = A_0^{(\alpha)} B_n^{(\beta)} + A_1^{(\alpha)} B_{n-1}^{(\beta)} + \cdots + A_n^{(\alpha)} B_0^{(\beta)}.$$

Hieraus folgt aber nach dem Satze **43**, 6 unmittelbar die Behauptung. Man hat, um dies zu erkennen, in dem genannten Satze nur

$$x_n = \frac{A_n^{(\alpha)}}{\binom{n+\alpha}{n}}, \qquad y_n = \frac{B_n^{(\beta)}}{\binom{n+\beta}{n}}, \qquad a_{n\nu} = \frac{\binom{\nu+\alpha}{\nu}\binom{n-\nu+\beta}{n-\nu}}{\binom{n+\gamma}{n}}$$

zu setzen, so daß

$$\frac{C_n^{(\gamma)}}{\binom{n+\gamma}{n}} = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} x_\nu y_{n-\nu}$$

wird. Nach den jetzigen Voraussetzungen strebt nämlich $x_n \to A$, $y_n \to B$, und die $a_{n\nu}$ erfüllen offenbar die 4 Voraussetzungen jenes Satzes. Also strebt der letzte Ausdruck für $n \to +\infty$ gegen AB.

---

[1] Wegen $a_n = o(n^\alpha)$, $b_n = o(n^\beta)$ sind die benutzten Potenzreihen für $|x| < 1$ absolut konvergent.

Beispiele und Bemerkungen.

1. Multipliziert man die Reihe $\sum(-1)^n$ wiederholt mit sich selbst, so erhält man die Reihen

$$(k-1)!\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+k-1}{k-1}, \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Da die Ausgangsreihe ($k=1$) nach **262** C_1-summierbar ist, so ist ihr Quadrat (spätestens) C_3-summierbar, die dritte Potenz (spätestens) C_5-summierbar usw. Nach **268**, 2 wissen wir aber, daß die k^{te} unserer Reihen schon (genau) C_k-summierbar ist.

2. Diese Beispiele zeigen, daß die durch den Satz 9 angegebene Ordnung der Summierbarkeit der Produktreihe nicht die *genaue* Ordnung zu sein braucht und in speziellen Fällen wirklich zu hoch sein kann. Das ist insofern nicht überraschend, als wir ja schon wissen, daß das Produkt zweier konvergenter Reihen ($k=0$) wieder konvergent ausfallen kann. Die Bestimmung der genauen Ordnung der Summierbarkeit der Produktreihe erfordert spezielle Untersuchungen.

Zum Abschluß wollen wir noch auf einen anderen Satz eingehen, der durch Einführung der Summierbarkeit an Stelle der Konvergenz erheblich verallgemeinert werden kann, den ABELschen Grenzwertsatz **100** bzw. dessen Erweiterung **233**:

Satz 10. *Hat die Potenzreihe $f(z)=\sum a_n z^n$ den Radius 1 und ist sie in dem Randpunkte $+1$ des Einheitskreises noch C_k-summierbar zum Werte s, so strebt auch* **278.**

$$\sum a_n z^n = f(z) \to s$$

für jede Annäherung von z an $+1$, bei der z auf einen Winkelraum beschränkt bleibt, der von irgend zwei festen Strahlen gebildet wird, die von $+1$ in das Innere des Einheitskreises dringen (s. Fig. 10, S. 419).

Beweis. Wir wählen wie beim Beweise von **233** eine beliebige, im Innern des Einheitskreises und im Winkelraum liegende, gegen $+1$ strebende Punktfolge $(z_0, z_1, \ldots, z_\lambda, \ldots)$ und haben nur zu zeigen, daß $f(z_\lambda)\to s$ strebt. Wenden wir aber den TOEPLITZschen Satz **221** auf die nach Voraussetzung $\to s$ konvergierende Zahlenfolge $\sigma_n = S_n^{(k)} : \binom{n+k}{k}$ an[1] und benutzen die Matrix $(a_{\lambda n})$ mit

$$a_{\lambda n} = \binom{n+k}{k}(1-z_\lambda)^{k+1}\cdot z_\lambda^n,$$

so liefert er sofort, daß auch die transformierte Folge

$$\sigma'_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda n}\sigma_n = (1-z_\lambda)^{k+1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)}\cdot z_\lambda^n \to s$$

strebt. Wegen $\sum S_n^{(k)} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}\, f(z)$ ist dies aber genau der Inhalt der Behauptung. Damit wäre also schon alles bewiesen, wenn wir noch zeigen, daß die gewählte Matrix $(a_{\lambda n})$ die Voraussetzungen (a),

[1] Es ist k jetzt die *feste* Ordnung der vorausgesetzten Summierbarkeit!

(b) und (c) der Sätze **221** erfüllt. Wegen $z_\lambda \to 1$ ist dies für die Voraussetzung (*a*) evident; und wegen

$$A_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda n} = (1 - z_\lambda)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z_\lambda^n = (1 - z_\lambda)^{k+1} \cdot \frac{1}{(1 - z_\lambda)^{k+1}} = 1$$

ist auch (c) erfüllt. Die Bedingung (b) endlich verlangt die Existenz einer Konstanten K', so daß für alle λ

$$\sum_n |a_{\lambda n}| = \left(\frac{|1 - z_\lambda|}{1 - |z_\lambda|}\right)^{k+1} < K'$$

bleibt. Nach den Erwägungen von S. 420 leistet dies aber ersichtlich die Konstante $K' = K^{k+1}$, wenn K die dort festgelegte Bedeutung hat.

Für $k = 0$ haben wir hierin genau den S. 419/20 durchgeführten Beweis des ABELschen Grenzwertsatzes in der STOLZschen Verallgemeinerung. Für $k = 1$ ergibt sich eine zuerst von C. FROBENIUS[1] angegebene Verallgemeinerung dieses Grenzwertsatzes, und für $k = 2, 3, \ldots$ erhält man weitere Stufen der Verallgemeinerung, wie sie im wesentlichen von O. HÖLDER[2] herrühren — mit H_k- statt C_k-Summierbarkeit und mit radialer Annäherung statt solcher im Winkelraum — und wie sie in der bewiesenen Form (wenn auch mit ganz anderen Beweisen) zuerst von E. LASKER[3] und A. PRINGSHEIM[4] ausgesprochen worden sind.

Da nach diesem Satz 10 insbesondere für *reelle* gegen $+1$ wachsende x gleichfalls $\lim(\sum a_n x^n) = s$ ist, so können wir den wesentlichen Inhalt des Satzes auch durch folgende kurze Formulierung wiedergeben, durch die er sich noch besser in den jetzigen Zusammenhang einordnet:

279. **Satz 11.** *Aus der C_k-Summierbarkeit einer Reihe $\sum a_n$ zum Werte s folgt stets ihre A-Summierbarkeit zum gleichen Werte.*

Die weiteren Anwendungen der C_k-Summierbarkeit führen, von der im nächsten Paragraphen ausführlicher behandelten C_1-Summierbarkeit der Fourierreihen abgesehen, meist zu tief in die Funktionentheorie hinein, als daß wir hier ausführlicher darauf eingehen könnten. Doch möchten wir es uns nicht versagen, zum Schluß noch, ohne auf die Beweise einzugehen, über eine Anwendung zu berichten, die zu besonders schönen Ergebnissen geführt hat. Es ist dies die Anwendung der C_k-Summierbarkeit auf die Theorie der DIRICHLETschen Reihen.

---

[1] Journ. reine u. angew. Math. Bd. 89, S. 262. 1880.
[2] Vgl. die S. 481, Fußnote 2, genannte Arbeit.
[3] Philosoph. Transactions Bd. 196A, S. 431. London 1901.
[4] Acta mathematica Bd. 28, S. 1. 1904.

Die DIRICHLETsche Reihe

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

ist für alle z konvergent, für die $\Re(z) > 0$ ist, für alle andern divergent[1]. Im Punkte 0 aber, wo es sich um die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ handelt, ist sie C_1-summierbar mit der Summe $\frac{1}{2}$; im Punkte -1, wo es sich um die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ handelt, ist sie (vgl. S. 482) C_2-summierbar mit der Summe $\frac{1}{4}$; und die **268**, 3 gemachten Angaben lehren, daß die Reihe für $z = -(k-1)$ noch C_k-summierbar ist mit der Summe $\frac{2^k - 1}{k} B_k$, welchen ganzzahligen Wert $\geqq 2$ auch k haben mag.

Diese Eigenschaft nun, außerhalb ihres Konvergenzgebietes $\Re(z) > 0$ für ein passendes k noch C_k-summierbar zu sein, beschränkt sich nicht auf die genannten Punkte, sondern man kann mit verhältnismäßig einfachen Mitteln zeigen, daß unsere Reihe für alle z, für die $\Re(z) > -k$ ist, noch C_k-summierbar ist. Und zwar ist die Ordnung dieser Summierbarkeit *genau* $= k$ für alle der Bedingung

$$-k < \Re(z) \leqq -(k-1)$$

genügenden Punkte z, die einen leicht zu erkennenden Streifen der z-Ebene erfüllen. Der *Konvergenz*grenzgeraden gesellen sich also Grenzgeraden für die *Summierbarkeit* der verschiedenen Ordnungen zu, und zwar ist hiernach das Gebiet, in dem die Reihe von *spätestens* k^{ter} Ordnung summierbar ist, die Halbebene

$$\Re(z) > -k, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Während also früher nur jedem Punkte der rechten Halbebene $\Re(z) > 0$ eine „Summe" der Reihe $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$ zugeordnet wurde, wird jetzt *jedem* Punkte der ganzen Ebene eine solche Summe zugeordnet, durch die Reihe also *in der ganzen Ebene* eine Funktion von z definiert. Ganz ähnlich nun, wie im *Konvergenz*gebiet unserer DIRICHLETschen Reihe, läßt sich nun weiter zeigen, daß diese Funktionswerte auch in dem Summierbarkeitsgebiete — also in der ganzen Ebene — eine analytische Funktion definieren. *Durch unsere Reihe wird also eine ganze Funktion definiert*[2].

---

[1] Es ist $f(z) = \left(1 - \frac{2}{2^z}\right) \cdot \zeta(z)$, wenn $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ die RIEMANNsche ζ-Funktion bezeichnet. (Vgl. **256**, 4, 9, 10 u. 11.)

[2] Hieraus folgt dann ziemlich leicht über die RIEMANNsche ζ-Funktion das wichtige Ergebnis, daß auch die Funktion $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ eine *ganze Funktion* ist.

Ganz ähnliche Summierbarkeitsverhältnisse weist nun im allgemeinen jede DIRICHLETsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

auf[1]. Neben die *Konvergenz*gerade $\mathfrak{R}(z) = \lambda$ oder λ_0, wie wir nun lieber schreiben wollen, weil Konvergenz mit C_0-Summierbarkeit gleichbedeutend ist, treten noch die Grenzgeraden $\mathfrak{R}(z) = \lambda_k$ für die C_k-Summierbarkeit ($k = 1, 2, \ldots$). Sie sind charakterisiert durch die Bedingung, daß die Reihe für $\mathfrak{R}(z) > \lambda_k$ von spätestens k^{ter} Ordnung summierbar ist, während dies für kein z mit $\mathfrak{R}(z) < \lambda_k$ mehr der Fall ist. Es ist natürlich $\lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots$, und die λ_k streben daher entweder $\to -\infty$ oder gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert. Bezeichnen wir diesen in beiden Fällen mit Λ, so ist die vorgelegte DIRICHLETsche Reihe für jedes z mit $\mathfrak{R}(z) > \Lambda$ bei passender Wahl von k noch C_k-summierbar, und ihre Summe definiert eine in diesem Gebiete reguläre analytische Funktion. Ist Λ *endlich*, so wird die Gerade $\mathfrak{R}(z) = \Lambda$ als die *Summierbarkeits-Grenzgerade* bezeichnet.

Zur Untersuchung der allgemeineren DIRICHLETschen Reihen (s. S. 456, Fußnote 1)

$$\sum a_n e^{-\lambda_n z}$$

hat es sich als zweckmäßiger erwiesen, die RIESZsche $R_{\mu k}$-Summierbarkeit zu benutzen. Vgl. das **266**, 2 genannte Büchlein von HARDY und RIESZ.

§ 61. Anwendung der C_1-Summierung auf die Theorie der FOURIERschen Reihen.

Abgesehen von dem greifbaren Vorteil aller Summierungsverfahren, der darin besteht, daß viele unendliche Reihen, die wir bisher als sinnlos verwerfen mußten, nunmehr einen brauchbaren Sinn bekommen und daß dadurch also das Anwendungsfeld der unendlichen Reihen sehr erheblich erweitert wird, liegt das theoretisch außerordentlich Befriedigende dieser Verfahren darin, daß viele verworrene und undurchsichtige Sachverhalte durch ihre Einführung nun plötzlich von äußerster Einfachheit werden. Ein erstes Beispiel hierfür bot das Multiplikationsproblem unendlicher Reihen (s. S. 478, sowie 506). Aber die in diesem Sinne vielleicht schönste und auch praktisch bedeutungsvollste Anwendung der C_1-Summierung ist diejenige, die L. FEJÉR von ihr auf

[1] BOHR, H.: Über die Summabilität DIRICHLETscher Reihen, Gött. Nachr. 1909, S. 247 und: Bidrag til de Dirichletske Räkkers Theori, Dissert., Kopenhagen 1910.

die Theorie der Fourierreihen gemacht hat[1]. Hier sahen wir (S. 381/82), daß die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen die Fourierreihe einer integrierbaren Funktion konvergiert und die gegebene Funktion darstellt, äußerst schwierig ist. Insbesondere weiß man z. B. nicht, was für notwendige und hinreichende Bedingungen eine an einer Stelle x_0 *stetige* Funktion dort noch zu erfüllen hat, damit ihre Fourierreihe in diesem Punkte konvergiert und den betreffenden Funktionswert darstellt. Wir haben in § 49, C verschiedene Kriterien dafür kennen gelernt; aber sie hatten alle nur den Charakter hinreichender Bedingungen. Lange vermutete man auch, daß *jede* in x_0 stetige Funktion $f(x)$ eine Fourierreihe besitzt, die dort konvergiert und die Summe $f(x_0)$ hat. Erst durch ein Beispiel von DU BOIS-REYMOND (s. **216**, 1) wurde diese Vermutung zuschanden. *Die Fourierreihe einer in x_0 stetigen Funktion kann dort tatsächlich divergieren.*

Noch schwieriger wird die Frage, wenn wir — als zunächst wohl geringstes Maß an Voraussetzungen über $f(x)$ — nur verlangen, daß die (integrierbare) Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 so beschaffen ist, daß

$$\lim_{t \to +0} \tfrac{1}{2}\left[f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)\right] = s(x_0)$$

existiert. *Was für notwendige und hinreichende Bedingungen muß die Funktion $f(x)$ darüber hinaus noch erfüllen, damit ihre Fourierreihe in x_0 konvergiert und die Summe $s(x_0)$ hat?*

Wie betont, ist die Frage noch keineswegs beantwortet. Aber dieser verworrene und undurchsichtige Sachverhalt wird nun aufs befriedigendste geklärt, wenn man an Stelle der Konvergenz die Summierbarkeit — und zwar genügt schon die C_1-Summierbarkeit — der Fourierreihen in Betracht zieht. Es gilt nämlich der folgende schöne

Satz von FEJÉR. *Ist für die in $0 \leqq x \leqq 2\pi$ integrierbare, mit 2π periodische Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 dieses Intervalles der Grenzwert* **280.**

$$\lim_{t \to +0} \tfrac{1}{2}\left[f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)\right] = s(x_0)$$

vorhanden, so ist ihre Fourierreihe dort stets C_1-summierbar zum Werte $s(x_0)$.

Beweis. Ist

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x_0 + b_n \sin n x_0)$$

die Fourierreihe von $f(x)$ an der Stelle x_0, so hatten wir S. 367/71 für

[1] FEJÉR, L.: Untersuchungen über die FOURIERschen Reihen. Math. Ann. Bd. 58, S. 51. 1904.

die n^{te} Teilsumme derselben gefunden:

$$s_n = s_n(x_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}[f(x_0+2t)+f(x_0-2t)]\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt,$$
$$(n = 0, 1, \ldots).$$

Folglich ist für $n = 1, 2, \ldots$

$$s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}[f(x_0+2t)+f(x_0-2t)]\,\frac{\sin t + \sin 3t + \cdots + \sin(2n-1)t}{\sin t}\,dt.$$

Nun war nach **201**, 5 für $t \neq k\pi$

$$\sin t + \sin 3t + \cdots + \sin(2n-1)t = \frac{\sin^2 n t}{\sin t},$$

und dies gilt auch noch für $t = k\pi$, wenn man dann unter dem rechter Hand stehenden Quotienten dessen Grenzwert für $t \to k\pi$ versteht, welcher ersichtlich 0 ist. Folglich ist[1]

$$\sigma_{n-1} = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$
$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[f(x_0+2t)+f(x_0-2t)]\left(\frac{\sin n t}{\sin t}\right)^2 dt.$$

In der Tatsache, daß in diesem Integral — man nennt es kurz das *Fejérsche Integral* — im Gegensatz zum Dirichletschen Integral der kritische Faktor $\frac{\sin n t}{\sin t}$ im *Quadrat* auftritt und also nur einerlei Vorzeichen haben kann und daß überdies der Faktor $\frac{1}{n}$ davor steht, liegt das Gelingen des weiteren Beweises begründet. Ist nun der Grenzwert

$$\lim_{t\to+0} \tfrac{1}{2}[f(x_0+2t)+f(x_0-2t)] = s(x_0) = s$$

vorhanden, so behauptet der Fejérsche Satz einfach, daß $\sigma_n \to s$ strebt.

Dazu bemerken wir zunächst, daß

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin n t}{\sin t}\right)^2 dt = n\,\frac{\pi}{2}$$

[1] Wir bezeichnen hier die arithmetischen Mittel der s_n mit $\sigma_n = \sigma_n(x)$ statt mit $s'_n = s'_n(x)$, um Verwechslungen mit der Ableitung auszuschließen.

ist[1], denn der Integrand ist seiner Entstehung nach

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(2\nu - 1)t}{\sin t},$$

und jeder Summand dieser Summe liefert, wenn man ihn von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ integriert, den Wert $\frac{\pi}{2}$, denn es ist ja

$$\frac{\sin(2\nu-1)t}{\sin t} = 1 + 2\cos 2t + 2\cos 4t + \cdots + 2\cos 2(\nu-1)t.$$

Daher kann

$$s = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} s \cdot \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt$$

und also

$$\sigma_{n-1} - s = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)}{2} - s\right]\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt$$

gesetzt werden. Nach Voraussetzung strebt hier der Ausdruck, der in der eckigen Klammer steht, $\to 0$ für $t \to +0$. Damit also σ_{n-1} oder $\sigma_n \to s$ strebt, genügt es, dies zu zeigen:

Wenn $\varphi(t)$ in $0 \ldots \frac{\pi}{2}$ integrierbar ist und der Bedingung **281.**

$$\lim_{t\to+0} \varphi(t) = 0$$

genügt, so strebt bei wachsendem n

$$\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \to 0.$$

Das ergibt sich nun tatsächlich durch allereinfachste Abschätzungen. Wegen $\varphi(t) \to 0$ kann man nämlich, wenn $\varepsilon > 0$ gegeben wird, ein positives $\delta < \frac{\pi}{2}$ so bestimmen, daß für $0 < t \leqq \delta$ stets $|\varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Dann ist

$$\left|\frac{2}{n\pi}\int_0^{\delta} \varphi(t)\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

da ja das letzte Integral einen positiven Integranden hat und also kleiner bleibt als das von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ erstreckte Integral über denselben

[1] Man kann diesen Integralwert direkt aus dem Fejérschen Integral selbst ablesen, indem man es auf die Funktion $f(x) = 1$ anwendet, für die $a_0 = 2$ ist und alle andern Fourierkonstanten $= 0$ werden.

Integranden. Andrerseits gibt es eine Konstante M, so daß in $0 < t < \frac{\pi}{2}$ stets $|\varphi(t)| < M$ bleibt. Folglich ist

$$\left| \frac{2}{n\pi} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \cdot \left(\frac{\sin n t}{\sin t}\right)^2 dt \right| \leqq \frac{2M}{n\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \delta}.$$

Und da hier alles außer n feste Werte hat, so kann man n_0 so groß nehmen, daß für $n > n_0$ dieser Ausdruck seinerseits $< \frac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Dann ist aber für diese n stets

$$|\sigma_{n-1} - s| < \varepsilon,$$

und es strebt also $\sigma_n \to s$. Damit ist der FEJÉRsche Satz in vollem Umfange bewiesen[1].

282. **Zusatz 1.** Ist $f(x)$ in dem abgeschlossenen Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stetig und ist überdies $f(0) = f(2\pi)$, *so ist die Fourierreihe von* $f(x)$ *für jedes* x *stets* C_1*-summierbar mit der Summe* $f(x)$. Denn nun sind die Voraussetzungen des FEJÉRschen Satzes gewiß für jedes x erfüllt, und man hat stets $s(x) = f(x)$. Dabei denken wir uns wie immer die Funktion $f(x)$ in den Intervallen $2k\pi \leqq x \leqq 2(k+1)\pi$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, durch die Forderung der Periodizität $f(x) = f(x - 2k\pi)$ festgelegt.

Wir behaupten nun weiter:

Zusatz 2. *Unter den Bedingungen des vorigen Zusatzes ist die für alle* x *bestehende* C_1*-Summierbarkeit sogar eine für alle diese* x *gleichmäßige, d. h. die Folge der Funktionen* $\sigma_n(x)$ *strebt für alle* x *gleichmäßig gegen* $f(x)$, oder also: Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ läßt sich *eine* Zahl N so angeben, daß für alle $n > N$ ohne Rücksicht auf die Lage von x stets

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

bleibt[2].

Beweis. Wir haben nur noch zu zeigen, daß man die Abschätzungen des vorigen Beweises so durchführen kann, daß sie für *jede* Lage von x gelten. Nun ist aber

$$\varphi(t) = \varphi(t, x) = \tfrac{1}{2}[f(x + 2t) - f(x)] + \tfrac{1}{2}[f(x - 2t) - f(x)];$$

und da $f(x)$ als durchweg stetige und periodische Funktion auch für alle x gleichmäßig stetig ist (vgl. § 19, Satz 5), so kann man, nachdem ε gegeben ist, *ein* $\delta > 0$ so bestimmen, daß für alle $|t| < \delta$

$$|f(x \pm 2t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

[1] Beiläufig sei noch erwähnt, daß die Approximationskurven $y = \sigma_n(x)$ die GIBBSsche Erscheinung (s. **216**, 4) *nicht* aufweisen (FEJÉR, L.: Math. Ann. Bd. 64, S. 273. 1907).

[2] Das Entsprechende gilt übrigens auch in dem allgemeinen Satz von FEJÉR für jedes abgeschlossene Intervall, das einschließlich seiner Enden in einem offenen Intervall liegt, in dem $f(x)$ stetig ist.

bleibt, — und dies für *jede* Lage von x. Dann ist aber auch — ohne Rücksicht auf die Lage von x — für diese t stets

$$|\varphi(t)| = |\varphi(t, x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und also wie vorhin

$$\left| \frac{2}{n\pi} \int_0^\delta \varphi(t) \left(\frac{\sin n t}{\sin t}\right)^2 dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ferner ist $f(x)$ als durchweg stetige und periodische Funktion auch beschränkt. Ist etwa stets $|f(x)| < K$, so ist, wie man sofort sieht, *stets*, d. h. für *alle* t und *alle* x,

$$|\varphi(t)| = |\varphi(t, x)| < 2K$$

und also ganz ähnlich wie vorhin

$$\left| \frac{2}{n\pi} \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \cdot \left(\frac{\sin n t}{\sin t}\right)^2 dt \right| \leqq \frac{1}{n} \cdot \frac{2K}{\sin^2 \delta}.$$

Nun kann man wirklich *eine* Zahl N so bestimmen, daß dieser letzte Ausdruck für alle $n \geqq N$ stets $< \frac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Für diese n ist dann also $|\sigma_{n-1} - s| < \varepsilon$, so daß sich tatsächlich, wie behauptet, dem gegebenen ε *eine* Zahl N so zuordnen läßt, daß für alle $n > N$ und ohne Rücksicht auf die Lage von x stets

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

bleibt.

Als leichte Anwendung ergibt sich aus diesen Sätzen noch der wichtige

Weierstrasssche Approximationssatz. *Ist $F(x)$ eine in dem abgeschlossenen Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion und ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so gibt es stets ein Polynom $P(x)$ mit der Eigenschaft, daß in $a \leqq x \leqq b$* **282a.**

$$|F(x) - P(x)| < \varepsilon$$

bleibt.

Beweis. Setzt man $F\left(a + \frac{b-a}{\pi} x\right) = f(x)$, so ist $f(x)$ in $0 \leqq x \leqq \pi$ definiert und stetig. In $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ werde, wie in § 50, 2. Art, $f(x) = f(2\pi - x)$ gesetzt und für alle übrigen x durch die Periodizitätsbedingung $f(x + 2\pi) = f(x)$ definiert. Damit ist $f(x)$ durchweg stetig. Hat nun $\sigma_n(x)$ für diese Funktion $f(x)$ dieselbe Bedeutung wie im vorangehenden Satze, so läßt sich ein Index m so wählen, daß für alle x

$$|f(x) - \sigma_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bleibt. Dieses $\sigma_m(x)$ ist aber eine Summe endlich vieler Ausdrücke der Form $a \cos p x$ und $b \sin q x$ und läßt sich also unter Benutzung der Potenzreihen des § 24 durch eine beständig konvergente Potenzreihe, etwa durch

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

darstellen. Da diese in $0 \leqq x \leqq \pi$ gleichmäßig konvergiert, läßt sich endlich k so bestimmen, daß, wenn das Polynom

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k = p(x)$$

gesetzt wird, in $0 \leqq x \leqq \pi$ stets

$$|\sigma_m(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und also

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

bleibt. Setzt man nun noch

$$p\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right) = P(x),$$

so ist $P(x)$ ein Polynom der verlangten Art, da jetzt in $a \leqq x \leqq b$ stets

$$|F(x) - P(x)| < \varepsilon$$

bleibt.

§ 62. Das A-Verfahren.

Der letzte Satz des § 60 lehrte schon, daß das Wirkungsfeld des A-Verfahrens diejenigen *aller* C_k-Verfahren umfaßt. Insofern ist es den C- und H-Verfahren überlegen. Es ist auch nicht schwer, Beispiele von Reihen anzugeben, die zwar A-summierbar, aber von keiner noch so hohen Ordnung C_k-summierbar sind. Es genügt schon, die Potenzreihenentwicklung $\sum a_n x^n$ von

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$$

an der Stelle $x = -1$ zu betrachten. Da offenbar $\lim f(x)$ für $x \to -1 + 0$ existiert und $= \sqrt{e}$ ist, so ist die Reihe $\sum (-1)^n a_n$ hiernach A-summierbar zum Werte $\sqrt{e}$. Wäre sie aber C_k-summierbar für ein bestimmtes k, so müßte nach **271** $a_n = o(n^k)$ sein. Einen bestimmten Koeffizienten a_n findet man nun, indem man die Koeffizienten von x^n in den Entwicklungen der einzelnen Glieder der für $|x| \leqq \varrho < 1$ gleichmäßig konvergenten Reihe

$$e^{\frac{1}{1-x}} = 1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(1-x)^2} + \cdots + \frac{1}{\nu!}\frac{1}{(1-x)^\nu} + \cdots$$

addiert (s. **249**). Da hierbei ersichtlich alle Entwicklungskoeffizienten positiv sind, so ist a_n jedenfalls größer als der Koeffizient von x^n in der Entwicklung eines einzelnen dieser Glieder. Greift man das $(k+2)^{\text{te}}$

heraus, so sieht man, daß

$$a_n > \frac{1}{(k+2)!}\binom{n+k+1}{k+1} > \frac{n^{k+1}}{(k+2)!\,(k+1)!}$$

ist. Bei festem k strebt also $a_n : n^k$ sicher *nicht* $\to 0$, sondern im Gegenteil $\to +\infty$.

Ist hiernach das A-Verfahren wirksamer als alle C_k-Verfahren zusammen genommen, so ist es doch durch die sehr einfache Feststellung begrenzt, daß seine Anwendung auf eine Reihe $\sum a_n$ die Konvergenz von $\sum a_n x^n$ bzw. $\sum s_n x^n$ für $|x| < 1$ erfordert

Satz 1. *Ist die Reihe $\sum a_n$ mit den Teilsummen s_n A-summierbar, so* **283.**
ist notwendig

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \leqq 1 \quad \textit{und} \quad \overline{\lim}\sqrt[n]{|s_n|} \leqq 1$$

oder also, was genau dasselbe besagt, für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$

$$a_n = O\left((1+\varepsilon)^n\right) \quad \textit{und} \quad s_n = O\left((1+\varepsilon)^n\right).$$

Hierin haben wir ein Gegenstück zu Satz 3 des § 60 zu sehen; aber auch dessen Sätze 4 und 5 haben hier genaue Analoga:

Satz 2. *Bei einer A-summierbaren Reihe $\sum a_n$ muß notwendig* **284.**

$$A\text{-}\lim a_n = 0 \quad \textit{und sogar} \quad A\text{-}\lim \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n+1} = 0$$

sein.

Beweis. Die erste dieser Beziehungen besagt, daß $(1-x)\sum a_n x^n$ für $x \to 1-0$ gegen 0 streben soll. Das ist aber fast selbstverständlich, da nach Voraussetzung ja $\sum a_n x^n \to s$ strebt. Die Richtigkeit der zweiten Beziehung ergibt sich im Anschluß an den Beweis von **273** wieder aus den beiden Beziehungen

$$(*) \quad (1-x)\cdot\sum s_n x^n \to s \quad \text{und} \quad (1-x)\cdot\sum \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} x^n \to s$$

durch Subtraktion, von denen die erste lediglich die Voraussetzung der A-Summierbarkeit von $\sum a_n$ zum Ausdruck bringt, während die zweite sich ohne Schwierigkeit aus ihr folgern läßt. Denn aus

$(1-x)\sum s_n x^n \to s$ folgt zunächst $(1-x)^2 \sum (s_0 + s_1 + \cdots + s_n) x^n \to s$

nach **102**. Und daß hieraus die zweite der Beziehungen (*) folgt, ist lediglich ein Spezialfall des folgenden einfachen Grenzwertsatzes:

Hilfssatz. *Wenn für $x \to 1-0$ eine in $0 \leqq x < 1$ integrierbare* **285.**
Funktion $f(x)$ der Beziehung

$$(1-x)^2 f(x) \to s$$

genügt, so strebt auch

$$(1-x)\cdot\int_0^x f(t)\,dt = (1-x)\,F(x) \to s.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der sog. Regel von de l'Hospital, nach der

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{F'(x)}{G'(x)}$$

ist, falls der rechtsstehende Grenzwert existiert, falls $G(x) > 0$ ist und für $x \to 1-0$ gegen $+\infty$ strebt. Man hat in ihr nur $G(x) = (1-x)^{-1}$ zu nehmen. Direkt ergibt sich der Beweis so[1]:

Wir setzen $(1-x)^2 f(x) = s + \varrho(x)$. Dann strebt $\varrho(x) \to 0$ für $x \to 1-0$, und wir können nach Wahl von $\varepsilon > 0$ ein x_1 in $0 < x_1 < 1$ so angeben, daß für $x_1 < x < 1$ stets $|\varrho(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Dann ist für diese x

$$|(1-x)F(x) - s| \leq (1-x)|s| + (1-x)\left|\int_0^{x_1} \frac{\varrho(x)}{(1-x)^2}\,dx\right| + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

woraus in üblicher Weise die Behauptung folgt.

Durch diese Sätze 1 und 2 haben wir das Wirkungsfeld des A-Verfahrens *nach außen* einigermaßen abgegrenzt. Sehr viel feiner ist wieder die Frage (vgl. die Ausführungen von S. 503), *wo* jenseits der ohnehin konvergenten Reihen seine Wirksamkeit *beginnt*. In dieser Richtung liegt der folgende von A. TAUBER[2] herrührende

286. **Satz 3.** *Eine A-summierbare Reihe $\sum a_n$, für die $n a_n \to 0$ strebt, für die also*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ist, ist schon im gewöhnlichen Sinne konvergent. (o-$A \to K$-Satz.)

Beweis. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so wählen wir ein $n_0 > 0$ so, daß für $n > n_0$.

$$\text{a)}\ |n a_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{b)}\ \frac{|a_1| + 2|a_2| + \cdots + n|a_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\text{c)}\ \left|f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - s\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \left(f(x) = \sum a_n x^n\right),$$

bleibt. (Hiervon können a) und c) nach Voraussetzung und ebenso b)

[1] Der Beweis verläuft ganz analog wie bei **43**, 1 und 2. — Die Bedeutung des in Rede stehenden Schlusses von der ersten auf die zweite der Beziehungen (*) kann auch so formuliert werden: *Aus* A-$\lim s_n = s$ *folgt* $A\,C_1$-$\lim s_n = s$. Denn es handelt sich an zweiter Stelle um die sukzessive Anwendung erst des C_1-, dann des A-Verfahrens zur Limitierung von (s_n).

[2] TAUBER, A.: Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 8, S. 273—277. 1897. Vgl. hierzu S. 503, Fußnote 1.

in Verbindung mit **43**, 2 erfüllt werden.) Dann ist für diese n und für positive $x < 1$

$$s_n - s = f(x) - s + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (1 - x^\nu) - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu x^\nu.$$

Beachtet man nun, daß in der ersten Summe

$$(1 - x^\nu) = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{\nu-1}) \leqq \nu(1 - x)$$

und in der zweiten $|a_\nu| = \frac{|\nu a_\nu|}{\nu} < \frac{\varepsilon}{3n}$ ist, so folgt, daß

$$|s_n - s| \leqq |f(x) - s| + (1 - x)\sum_{\nu=1}^{n} |\nu a_\nu| + \frac{\varepsilon}{3n(1 - x)}$$

ist, und zwar für alle positiven $x < 1$. Wählen wir speziell $x = 1 - \frac{1}{n}$, so folgt nach a), b) und c) weiter, daß für $n > n_0$

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ist. Also strebt $s_n \to s$, w. z. b. w.

Versteht man bei diesem Beweise unter ε nicht eine *beliebig vorgeschriebene*, sondern eine *passend gewählte* (hinreichend große) positive Zahl, so lehrt er zugleich die Richtigkeit des folgenden Zusatzes:

Zusatz. *Eine A-summierbare Reihe $\sum a_n$, für die $(n a_n)$ beschränkt ist, für die also*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ist, hat beschränkte Teilsummen.

Der sehr ähnlich lautende Satz 6 in § 60 legt die Vermutung nahe, daß hier auch ein O-$A \to K$-Satz gilt, der also die Konvergenz der Reihe $\sum a_n$ aus ihrer A-Summierbarkeit schon dann erschließt, wenn man bezüglich der a_n nur voraussetzt, daß sie $= O\left(\frac{1}{n}\right)$ sind. Dieser Satz gilt in der Tat und ist 1910 von J. E. LITTLEWOOD[1] bewiesen worden:

Satz 4. *Eine A-summierbare Reihe $\sum a_n$, für deren Glieder die Be-* **287.**
ziehung

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

gilt, für die also $(n a_n)$ beschränkt ist, ist schon im gewöhnlichen Sinne konvergent. (O-$A \to K$-Satz.)

Vorweg sei bemerkt, daß dieser Satz den Satz 6 des § 60, wie dort schon erwähnt, als Korollar enthält. Denn ist eine Reihe C_k-summierbar, so ist sie nach § 60, Satz 11, auch A-summierbar. Jede Reihe also, die

[1] The converse of Abel's theorem on power series. Proc. Lond. Math. Soc. (2) Bd. 9, S. 434—448. 1911.

den Voraussetzungen des Satzes 6 in § 60 genügt, erfüllt auch die Voraussetzungen des eben formulierten LITTLEWOODschen Satzes und ist also konvergent.

Die bisher bekannten Beweise dieses LITTLEWOODschen Satzes waren, obwohl sich viele Forscher damit beschäftigt hatten, recht kompliziert[1]; erst 1930 ist von J. KARAMATA[2] ein überraschend einfacher Beweis desselben gefunden worden. Seiner Darstellung schicken wir den folgenden fast selbstverständlichen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. *Es seien ϱ und ε beliebige positive reelle Zahlen und $f(t)$ die folgende in $0 \leqq t \leqq 1$ definierte und über dies Intervall (im RIEMANNschen Sinne) integrierbare Funktion*[3] (s. Fig. 13):

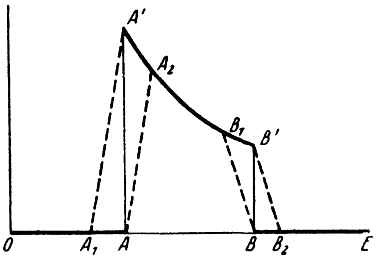

Fig. 13.

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ in } 0 \leqq t < e^{-(1+\varrho)}, \\ \frac{1}{t} \text{ in } e^{-(1+\varrho)} \leqq t < e^{-1}, \\ 0 \text{ in } e^{-1} \leqq t \leqq 1. \end{cases}$$

Dann gibt es stets zwei Polynome $p(t)$ und $P(t)$, die den beiden Bedingungen

(a) $p(t) \leqq f(t) \leqq P(t)$ *in* $0 \leqq t \leqq 1$,

(b) $\int_0^1 (P(t) - p(t))\,dt < \varepsilon$

genügen.

Beweis. Es sei (vgl. die nur schematisch gezeichnete Fig. 13) $OAA'B'BE$ das Bild der Funktion $f(t)$, so daß A und A' die Abszisse $e^{-(1+\varrho)}$, B und B' die Abszisse e^{-1} haben. Man wähle nun ein positives δ, das kleiner als die Abszisse von A, kleiner als die halbe Differenz der Abszissen von A und B und überdies

$$< \frac{\varepsilon}{4} e^{-(1+\varrho)}$$

ist, und markiere die Punkte A_1, A_2 sowie B_1, B_2, die auf dem genannten Kurvenbilde von $f(t)$ liegen und die Abszissen $e^{-(1+\varrho)} \pm \delta$ bzw. $e^{-1} \pm \delta$ haben. Dann sind die Linienzüge OAA_2B_1BE und $OA_1A'B'B_2E$ (von denen die Stücke A_2B_1 bzw. $A'B'$ auf der Kurve $\frac{1}{t}$ liegen, alle übrigen geradlinig sein sollen) die Bilder je einer stetigen

---

[1] Vgl. neben der in der vorigen Fußnote genannten Arbeit etwa E. LANDAU: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. 1. Aufl. S. 45—56. 1916; 2. Aufl. S. 57—62. 1929.

[2] KARAMATA, J.: Über die HARDY-LITTLEWOODsche Umkehrung des ABELschen Stetigkeitssatzes. Math. Zeitschr. Bd. 32, S. 319—320. 1930.

[3] Der Satz gilt unverändert für *jede* im RIEMANNschen Sinne integrierbare Funktion.

Funktion $g(t)$ bzw. $G(t)$, die ersichtlich den Bedingungen

(a′) $$g(t) \leqq f(t) \leqq G(t) \text{ in } 0 \leqq t \leqq 1,$$

(b′) $$\int_0^1 (G(t) - g(t))\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

genügen. Nach dem WEIERSTRASSschen Approximationssatze (**282a**) gibt es nun ein Polynom $p(t)$, das sich von der stetigen Funktion $g(t) - \frac{\varepsilon}{4}$ in $0 \leqq t \leqq 1$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{4}$ unterscheidet:

$$\left| g(t) - \frac{\varepsilon}{4} - p(t) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ in } 0 \leqq t \leqq 1.$$

Ebenso gibt es ein Polynom $P(t)$, das sich von $G(t) + \frac{\varepsilon}{4}$ dort auch um weniger als $\frac{\varepsilon}{4}$ unterscheidet:

$$\left| G(t) + \frac{\varepsilon}{4} - P(t) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ in } 0 \leqq t \leqq 1.$$

Diese Polynome genügen dann offenbar den Bedingungen (a) und (b) des Hilfssatzes.

Beweis des LITTLEWOODschen Satzes.

I. Nach dem Zusatz zu Satz 3 bilden die (s_n) unter den jetzigen Voraussetzungen eine jedenfalls *beschränkte Zahlenfolge.*

Bei dem weiteren Beweise bedeutet es keine Einschränkung, wenn *die Glieder der Reihe* $\sum a_n$ *reell* vorausgesetzt werden. Denn aus der Gültigkeit des Satzes für reelle Reihen folgt er ohne weiteres auch für Reihen mit komplexen Gliedern, indem man diese in ihren reellen und imaginären Teil zerlegt.

II. *Es werde $\varrho > 0$ gegeben und $[(1+\varrho)\,n] = k(n) = k$ gesetzt. Bedeuten dann wieder s_n die Teilsummen von $\sum a_n$ und wird für $n > \frac{1}{\varrho}$*

$$\operatorname*{Max}_{n<\nu\leqq k} |s_\nu - s_n| = \mu_n(\varrho) \qquad \textit{sowie} \qquad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, \mu_n(\varrho) = \mu(\varrho)$$

gesetzt[1], *so strebt $\mu(\varrho) \to 0$ für $\varrho \to 0$.*

In der Tat ist für $n < \nu \leqq k$

$$|s_\nu - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_\nu| \\ \leqq (k-n)\operatorname{Max}(|a_{n+1}|, |a_{n+2}|, \cdots, |a_k|).$$

[1] Mit Max $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ oder Max c_ν, $(1 \leqq \nu \leqq p)$, bezeichnet man die größte der (reell angenommenen) Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

Ist etwa $|a_r|$ dieses Maximum, so folgt weiter

$$|s_\nu - s_n| \leqq \frac{k-n}{r} \cdot r\,|a_r| \leqq \varrho \cdot r\,|a_r|.$$

Da es nun, weil $(n\,a_n)$ beschränkt sein sollte, eine Konstante K gibt, so daß stets $n\,|a_n| < K$ bleibt, so ist auch

$$\mu_n(\varrho) = \operatorname*{Max}_{n<\nu\leq k} |s_\nu - s_n| \leq \varrho \cdot K$$

und folglich

$$\mu(\varrho) \leqq \varrho \cdot K,$$

woraus die Behauptung abzulesen ist.

III. *Die Folge* (s_n) *sei*

1. *einseitig beschränkt, etwa stets* $s_n \geqq -M$, $(M \geqq 0)$,
2. *A-limitierbar, etwa* $(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu \to s$ *für* $x \to 1-0$,

dann strebt, wenn $f(t)$ *die im Hilfssatz angegebene Funktion bedeutet*[1],

$$(^*)\qquad (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu f(x^\nu)\cdot x^\nu \to s \cdot \int_0^1 f(t)\,dt, \ \textit{d. h.} = \varrho s.$$

Nach 2 strebt nämlich für jedes ganzzahlige $k \geqq 0$ bei $x \to 1-0$

$$(1-x^{k+1})\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \cdot (x^{k+1})^\nu \to s,$$

also

$$(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \cdot (x^\nu)^k \cdot x^\nu \to \frac{s}{k+1}.$$

Ist nun $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$ irgendein Polynom, so folgt hieraus sofort, daß

$$(^{**})\qquad (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu Q(x^\nu)\cdot x^\nu \to s\left(\frac{b_0}{1} + \frac{b_1}{2} + \cdots + \frac{b_q}{q+1}\right) = s \cdot \int_0^1 Q(t)\,dt$$

strebt.

Es sei nun ε eine beliebige positive Zahl. Dann läßt sich nach dem Hilfssatz ein Paar von Polynomen $p(t)$, $P(t)$ angeben, die den Bedingungen

$$\text{(a)}\qquad p(t) \leqq f(t) \leqq P(t) \ \text{ in } 0 \leqq t \leqq 1,$$

$$\text{(b)}\qquad \int_0^1 (P(t) - p(t))\,dt < \varepsilon$$

genügen.

[1] **Das ist der Hauptsatz von J. Karamata. — Satz und Beweis gelten, von dem speziellen Wert ϱs des Integrales $\int_0^1 f(t)\,dt$ abgesehen, unverändert für eine beliebige über $0 \leq t \leq 1$ im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion.**

Nimmt man jetzt zunächst an, daß $M = 0$, also stets $s_\nu \geqq 0$ ist, so ist

$$(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu\, p(x^\nu)\cdot x^\nu \leqq (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu\, f(x^\nu)\cdot x^\nu \leqq (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu\, P(x^\nu)\cdot x^\nu.$$

Für $x \to 1 - 0$ folgt hieraus nach (**)

$$s\cdot\int_0^1 p(t)\,dt \leqq \underline{\overline{\lim}}\,(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu\, f(x^\nu)\cdot x^\nu \leqq s\cdot\int_0^1 P(t)\,dt.$$

Die Integrale links und rechts unterscheiden sich nun nach (a) und (b) voneinander und ein jedes von $\int_0^1 f(t)\,dt$ um weniger als ε. Daher ist

$$\left|\underline{\overline{\lim}}\,(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu\, f(x^\nu)\cdot x^\nu - s\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqq s\cdot\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus die Behauptung (*) für nicht negative s_n.

Ist aber $M > 0$, so wende man den nun bewiesenen Satz auf die beiden Folgen $t_n \equiv s_n + M$ und $u_n \equiv M$ an Stelle von s_n an. Subtrahiert man die Ergebnisse, so erhält man die Behauptung (*) in ihrer vollen Allgemeinheit.

IV. Setzt man nun in der Beziehung III, (*) linker Hand $x = e^{-\frac{1}{n}}$ und geht auf die im Hilfssatz angegebene Bedeutung von $f(t)$ zurück, so folgt, wenn wieder $[(1+\varrho)\,n] = k(n) = k$ gesetzt wird, daß für $n \to +\infty$

$$\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)\sum_{\nu=n+1}^{k} s_\nu \to \varrho\, s$$

strebt. Wegen $n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \to 1$ und $\frac{k-n}{n} \to \varrho$ strebt dann

$$\frac{1}{k-n}\sum_{\nu=n+1}^{k} s_\nu \to s.$$

Setzt man also

$$\frac{1}{k-n}\sum_{\nu=n+1}^{k} s_\nu - s = \delta_n$$

so strebt $\delta_n \to 0$ und es ist

$$s - s_n = \frac{1}{k-n}\sum_{\nu=n+1}^{k} (s_\nu - s_n) - \delta_n.$$

Hiernach ist

$$|s - s_n| \leqq \operatorname*{Max}_{n < \nu \leqq k} |s_\nu - s_n| + |\delta_n| = \mu_n(\varrho) + |\delta_n|.$$

Für $n \to +\infty$ folgt hieraus

$$\overline{\lim} |s - s_n| \leqq \mu(\varrho);$$

und da dies für jedes $\varrho > 0$ gilt, so liefert dies nach II für $\varrho \to +0$

$$\overline{\lim} |s - s_n| = 0,$$

d. h.

$$s_n \to s.$$

Damit ist der Beweis vollendet.

288. Beispiele und Anwendungen.

1. Jede C-summierbare Reihe ist auch A-summierbar, und zwar zum gleichen Werte. Das gibt oft ein Mittel, um die Werte von C-summierbaren Reihen zu bestimmen. So sahen wir schon **268**, 3, daß die Reihen $\sum(-1)^n(n+1)^k$ C_{k+1}-summierbar sind. Jetzt können wir mit Hilfe der A-Summierung auch die *Werte* dieser Reihen ermitteln, die sich bequem als k^{te} Ableitung der geometrischen Reihe $\sum(-1)^n x^n$ ergeben, wenn man in dieser durch $x = e^{-t}$ die Exponentialfunktion einführt. Man erhält so die für $t > 0$ konvergente Reihe

$$e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t} - + \cdots.$$

Ihre Summe ist

$$= \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} = \frac{1}{e^t + 1} = \frac{e^t - 1}{e^{2t} - 1} = \frac{e^t + 1 - 2}{e^{2t} - 1} = \frac{1}{e^t - 1} - \frac{2}{e^{2t} - 1}$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \frac{2t}{e^{2t} - 1}.$$

Für hinreichend kleine $t > 0$ können wir nun die zuletzt erhaltenen Quotienten nach **105**, 5 in Potenzreihen entwickeln und erhalten, wenn wir sogleich die tiefsten Glieder bei beiden gegeneinander aufheben

$$e^{-t} - e^{-2t} + - \cdots + (-1)^n e^{-(n+1)t} + \cdots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)!} B_{n+1} t^n.$$

Differenzieren wir jetzt k-mal nach t, so erhalten wir weiter

$$e^{-t} - 2^k e^{-2t} + - \cdots + (-1)^n (n+1)^k e^{-(n+1)t} + \cdots$$

$$= (-1)^{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)!} B_{n+1} \cdot n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot t^{n-k}.$$

Lassen wir nun $t \to +0$ abnehmen, so erhalten wir rechter Hand ohne weiteres den Wert[1]

$$(-1)^{k+1} \frac{2^{k+1} - 1}{k+1} B_{k+1}.$$

Setzen wir linker Hand $e^{-t} = x$, so sehen wir, daß es sich um eine Potenzreihe mit dem Radius 1 handelt; und wenn t fallend $\to 0$ strebt, geht x wachsend $\to +1$. Der eben erhaltene Wert ist also definitionsgemäß die A-Summe der

[1] Nach S. 245, Fußnote, darf man hier für $k > 0$ das Vorzeichen $(-1)^{k+1}$ einfach weglassen.

Reihe $1 - 2^k + 3^k - + \cdots + (-1)^n (n+1)^k + \cdots$ für ganzzahlige $k \geq 0$. Und da wir diese Reihe in **268**, 3 schon als C_{k+1}-summierbar erkannt haben, so haben wir nach **279** auch ihre C_{k+1}-Summe ermittelt.

2. Ist die durch eine Potenzreihe $\sum c_n z^n$ mit dem Radius r dargestellte Funktion $f(z)$ in einem Randpunkte z_1 ihres Konvergenzkreises *regulär*, so ist für positive $\to +1$ wachsende x gewiß der Grenzwert $\lim f(x z_1)$ vorhanden und $= f(z_1)$. In jedem solchen Randpunkte ist also die Reihe $\sum a_n \equiv \sum c_n z_1^n$ noch A-summierbar, und ihre A-Summe liefert den Funktionswert $f(z_1)$.

3. Verbinden wir die vorige Bemerkung mit Satz 4, so haben wir: Ist $f(z) = \sum c_n z^n$ für $|z| < 1$ konvergent und ist $(n c_n)$ beschränkt, so konvergiert die Reihe (im gewöhnlichen Sinne) auch noch in jedem Randpunkte z_1 des Einheitskreises, in dem $f(z)$ regulär ist.

4. Daß das Cauchysche Produkt $\sum c_n \equiv \sum (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0)$ zweier A-summierbarer Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ mit den Werten A und B wieder A-summierbar ist und zwar zum Werte $C = A\,B$, ist eine ganz unmittelbare Folge der Definition der A-Summierbarkeit.

5. Bezüglich der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha i}}$, $(\alpha \gtrless 0)$, hatten wir schon bei **274** festgestellt, daß sie *nicht* konvergieren und daß sie auch von keiner Ordnung C_k-summierbar sind. Jetzt können wir nach dem Littlewoodschen Satz 4 hinzufügen, daß sie auch nicht A-summierbar sein können.

§ 63. Das E-Verfahren[1].

Das E_1-Verfahren war auf Grund der Eulerschen Reihentransformation (**144**) eingeführt. Gehen wir von einer (*nicht* alternierend geschriebenen) beliebigen Reihe $\sum a_n$ aus, so hätten wir

$$\frac{1}{2^{n+1}}\left[\binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \cdots + \binom{n}{n} a_n\right] = a'_n$$

zu setzen und $\sum a'_n$ als die E_1-Transformation von $\sum a_n$ anzusehen. Wir hatten verabredet, hier abweichend von der sonst üblichen Bezeichnungsweise $s_0 = 0$ und $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$ für $n > 0$ zu setzen[2] — und entsprechend für die gestrichene Reihe. Dann ist (s. **265**, 5)

$$s'_n = \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} s_0 + \binom{n}{1} s_1 + \cdots + \binom{n}{n} s_n\right]$$

die E_1-Transformation der Folge (s_n). Eine erneute Anwendung liefert

[1] Eine eingehende Untersuchung dieses Verfahrens findet sich in zwei Arbeiten des Verfassers *Über das Eulersche Summierungsverfahren* (I: Mathem. Zeitschr. Bd. 15, S. 226—253. 1922; II: ebenda Bd. 18, S. 125—156. 1923). Hier finden sich vollständige Beweise aller im folgenden erwähnten Sätze.

[2] Man weist ohne große Schwierigkeit nach, daß beim E_1-Verfahren „endlich viele Änderungen" ebenso erlaubt sind wie bei konvergenten Reihen. (Ein Beweis, auf den wir hier nicht eingehen wollen, findet sich in der ersten der in der vorigen Fußnote genannten Arbeiten.) Die Indexverschiebung ist also ohne Einfluß auf die Wirkung des Verfahrens.

nach leichter Rechnung als E_2-Transformation die Reihe

$$\sum a_n'' \quad \text{mit} \quad a_n'' = \frac{1}{4^{n+1}}\left[\binom{n}{0} 3^n a_0 + \binom{n}{1} 3^{n-1} a_1 + \cdots + \binom{n}{n} a_n\right]$$

und mit den Teilsummen

$$\begin{aligned} s_n'' &= a_0'' + a_1'' + \cdots + a_{n-1}'' \\ &= \frac{1}{4^n}\left[\binom{n}{0} 3^n s_0 + \binom{n}{1} 3^{n-1} s_1 + \cdots + \binom{n}{n} s_n\right], \qquad (n > 0). \end{aligned}$$

Als E_p-Transformation findet man ebenso die Reihe

$$\sum a_n^{(p)}$$

mit den Gliedern

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{(2^p)^{n+1}}\left[\binom{n}{0}(2^p - 1)^n a_0 + \binom{n}{1}(2^p - 1)^{n-1} a_1 + \cdots + \binom{n}{n} a_n\right]$$

und den Teilsummen[1]

$$s_n^{(p)} = a_0^{(p)} + a_1^{(p)} + \cdots + a_{n-1}^{(p)}$$

$$= \frac{1}{(2^p)^n}\left[\binom{n}{0}(2^p - 1)^n s_0 + \binom{n}{1}(2^p - 1)^{n-1} s_1 + \cdots + \binom{n}{n} s_n\right], \quad (n > 0).$$

Die Wirksamkeit des E_1-Verfahrens ist schon durch die **265**, 5 gegebenen Beispiele beleuchtet, von denen das letzte bereits zeigte, daß das Wirkungsfeld des E_1-Verfahrens erheblich weiter reicht als das des C- oder H-Verfahrens. Bilden wir ähnlich wie dort die E_p-Transformation der geometrischen Reihe $\sum z^n$, so erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2^p)^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}(2^p - 1)^{n-\nu} z^\nu\right] = \frac{1}{2^p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^p - 1 + z}{2^p}\right)^n.$$

Sie fällt also dann und nur dann konvergent aus[2] und zwar mit der Summe $\frac{1}{1-z}$, wenn $|z + (2^p - 1)| < 2^p$ ist, wenn also z im Innern des Kreises um den Punkt $-(2^p - 1)$ mit dem Radius 2^p liegt. Ersichtlich kann *jeder* Punkt der Halbebene $\Re(z) < 1$ in das Innere eines solchen Kreises verlegt werden, wenn nur p groß genug gewählt wird. Wir können daher sagen: *Die geometrische Reihe $\sum z^n$ ist für jeden Punkt z im Innern der Halbebene $\Re(z) < 1$ noch E_p-summierbar, wenn die Ordnung p passend gewählt wird.* Die Summe ist jedesmal $\frac{1}{1-z}$, also die analytische Fortsetzung der durch die Reihe im Einheitskreise definierten Funktion.

[1] Die Formel dieser Transformation legt es nahe, für die Ordnung p die Beschränkung auf ganze Zahlen ≥ 0 aufzuheben. Auf diese nicht-ganzzahligen Ordnungen wollen wir indessen hier nicht eingehen. (Vgl. S. 483, Fußnote 3.)

[2] Sie ist dann sogar *absolut* konvergent.

Bei beliebigen Potenzreihen liegen die Dinge ganz ähnlich, doch erfordert die Durchführung der Beweise tieferliegende Hilfsmittel der Funktionentheorie. Wir begnügen uns daher mit der Angabe des greifbarsten Ergebnisses[1]:

Die Potenzreihe $\sum c_n z^n$ habe einen positiven endlichen Konvergenzradius. Die im Konvergenzkreise durch sie dargestellte Funktion heiße $f(z)$. Diese Funktion denken wir uns auf jedem einzelnen Nullstrahle $\operatorname{arc} z = \varphi =$ konst. analytisch fortgesetzt, bis wir auf den ersten auf ihm gelegenen singulären Punkt von $f(z)$ treffen, den wir ζ_φ nennen wollen. (Liegt auf dem betreffenden Halbstrahle überhaupt kein singulärer Punkt, so kann dieser Halbstrahl ganz außer acht gelassen werden.) Wir beschreiben nun für ein bestimmtes ganzzahliges $p > 0$ den Kreis

$$\left|\frac{z}{\zeta_\varphi} + 2^p - 1\right| < 2^p,$$

der dem bei der geometrischen Reihe aufgetretenen entspricht und den wir K_φ nennen wollen. Die allen diesen Kreisen K_φ gemeinsamen Punkte werden in den einfachsten Fällen (d. h. wenn nur wenige singuläre Punkte da sind) ein Kreisbogenpolygon erfüllen und werden in jedem Falle eine gewisse Punktmenge bilden, die wir mit $\mathfrak{G}_p$ bezeichnen. Dann gilt der

Satz. *Bei jedem p ist $\sum c_n z^n$ in jedem inneren Punkte von $\mathfrak{G}_p$ noch E_p-summierbar, und die E_p-Transformation von $\sum c_n z^n$ ist dort sogar absolut konvergent. Die hierdurch den inneren Punkten von $\mathfrak{G}_p$ zugeordneten Zahlenwerte liefern die analytische Fortsetzung des Elementes $\sum c_n z^n$ in das Innere von $\mathfrak{G}_p$. Außerhalb von $\mathfrak{G}_p$ ist die E_p-Transformation von $\sum c_n z^n$ divergent.* **289.**

Nach diesen Beispielen fragen wir wieder allgemein nach den Grenzen des Wirkungsfeldes des E-Verfahrens; doch wollen wir uns bei diesen und den weiteren Untersuchungen auf die erste Ordnung, also das E_1-Verfahren, beschränken. Bei den höheren Ordnungen liegen die Dinge indessen ganz analog.

Da die E_1-Summierbarkeit einer Reihe $\sum a_n$ definitionsgemäß die Konvergenz ihrer E_1-Transformation $\sum \frac{1}{2^{n+1}}\left[\binom{n}{0}a_0 + \cdots + \binom{n}{n}a_n\right]$ bedeutet, so muß deren allgemeines Glied, also auch

$$\frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0}a_0 + \binom{n}{1}a_1 + \cdots + \binom{n}{n}a_n\right] \to 0$$

streben, wofür wir jetzt auch kürzer

$$E_1\text{-}\lim a_n = 0$$

schreiben können. In dieser Form haben wir dann wieder ein genaues Analogon zu **82**, 1 und **272** bzw. **284** vor uns. Auch der KRONECKERsche Satz **82**, 3 hat hier sein Analogon. Denn ist (s_n) eine E_1-limitierbare Folge mit dem Werte s, so streben ihre E_1-Transformierten $E_1(s_n) \equiv s'_n \to s$. Dann streben aber auch deren arithmetische Mittel $\frac{s'_0 + s'_1 + \cdots + s'_n}{n+1} \to s$, die wir hier, weil durch aufeinanderfolgende Anwendung erst der E_1-, dann der C_1-Transformation entstanden, auch kurz mit $C_1E_1(s_n)$ bezeichnen können. Nun stellt man aber durch eine direkte Ausrech-

[1] Wegen des Beweises s. S. 525, Fußnote 1.

nung leicht fest — wir möchten das dem Leser überlassen —, daß man hier genau dasselbe erhält, wenn man *erst* die C_1- und dann die E_1-Transformation ausübt, also die Folge $E_1 C_1(s_n) = E_1\left(\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}\right)$ bildet: *Es ist* $C_1 E_1(s_n) \equiv E_1 C_1(s_n)$; *die beiden Transformationen sind völlig identisch*[1]. Daher strebt auch die Folge

$$E_1\left(\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}\right) \to s,$$

und subtrahiert man dies von

$$E_1(s_n) \to s,$$

so erhält man genau wie S. 503 die behauptete Beziehung

$$E_1\text{-}\lim \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n+1} = 0$$

als notwendige Bedingung für die E_1-Summierbarkeit einer Reihe $\sum a_n$. Um nun noch festzustellen, was E_1-$\lim a_n = 0$ für die Größenordnung der a_n bedeutet, bilden wir aus

$$a'_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\binom{n}{0} a_0 + \cdots + \binom{n}{n} a_n\right]$$

rückwärts

$$a_n = (-1)^n \cdot 2\left[\binom{n}{0} a'_0 - \binom{n}{1} 2 a'_1 + - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} 2^n a'_n\right],$$

woraus, da $a'_n \to 0$ strebt, nach **43**, 5 sofort folgt, daß

$$\frac{a_n}{3^n} \to 0 \quad \text{streben, oder also} \quad a_n = o(3^n)$$

sein muß. Rechnet man das Entsprechende für die s_n und s'_n durch, so findet man analog, daß auch $s_n = o(3^n)$ sein muß. Wir haben also zusammenfassend den

290. **Satz 1.** *Die vier Bedingungen*

$$E_1\text{-}\lim a_n = 0, \qquad E_1\text{-}\lim \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n+1} = 0,$$

$$a_n = o(3^n) \quad \textit{und} \quad s_n = o(3^n)$$

***sind notwendig** für die E_1-Summierbarkeit der Reihe $\sum a_n$ mit den Teilsummen s_n.*

---

[1] Die Rechnung führt sofort auf die Beziehung, daß für $0 \le n \le k$

$$\binom{k+1}{n+1} + \binom{k+1}{n+2} + \cdots + \binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{n} + 2\binom{k-1}{n} + \cdots + 2^{k-n}\binom{n}{n}$$

ist, was man leicht als richtig erkennt. Wegen der genannten Eigenschaft sagt man auch, die E_1- und C_1-Transformationen seien miteinander **vertauschbar**. Das Entsprechende gilt für die Transformationen E_p und C_q beliebiger Ordnung; *es ist stets* $E_p C_q(s_n) \equiv C_q E_p(s_n)$. Vgl. hierzu S. 500, Fußnote 1 und S. 501.

Ein Vergleich dieses Satzes mit den Sätzen **271** und **283** und die Beispiele zu **265**, 5 zeigen, daß die Ausdehnung des Wirkungsfeldes des E_1-Verfahrens gegenüber dem C- und A-Verfahren erheblich größer, das E_1-Verfahren erheblich stärker ist als diese. Die Fragestellung aber, die beim C- und A-Verfahren uns zu den Sätzen **274** und **287** führte, wird hier sozusagen *eine geringere Feinheit* des Verfahrens offenbaren. Es gilt nämlich der

Satz 2. *Ist die Reihe $\sum a_n$ mit den Teilsummen s_n E_1-summierbar zum Werte s, streben also die Zahlen* **291.**

(A) $$s'_n = \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0}s_0 + \binom{n}{1}s_1 + \cdots + \binom{n}{n}s_n\right] \to s$$

und ist überdies

(B) $$a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

so ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent mit der Summe s. (o-$E_1 \to K$-Satz.)

Beweis. Wir bilden die Differenz

$$s'_{4n} - s_{2n} = \frac{1}{2^{4n}} \sum_{\nu=0}^{4n} \binom{4n}{\nu}(s_\nu - s_{2n})$$

und zerlegen den rechter Hand stehenden Ausdruck in drei Teile: $T_1 + T_2 + T_3$. Und zwar soll T_1 den Teil des Ganzen bedeuten, der für $\nu = 0$ bis $\nu = n$ entsteht, T_3 den Teil von $\nu = 3n$ bis $\nu = 4n$ und T_2 den verbleibenden mittleren Teil. Wegen (B) gibt es dann — grob abgeschätzt — eine Konstante K_1, so daß stets $|s_n| \leqq K_1\sqrt{n}$ bleibt. Also gibt es auch eine Konstante K, so daß für alle n

$$|s_\nu - s_{2n}| \leqq K\sqrt{n}$$

bleibt, wofern $0 \leqq \nu \leqq 4n$ ist. Daher sind $|T_1|$ und $|T_3|$ beide

$$< \frac{1}{2^{4n}} \cdot K \cdot \sqrt{n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{4n}{\nu} < \frac{K\sqrt{n}}{2^{4n}}(n+1)\binom{4n}{n}.$$

Nun ist aber[1] für jede natürliche Zahl $k > 1$

$$e\left(\frac{k}{e}\right)^k < k! < ek\left(\frac{k}{e}\right)^k$$

[1] Diese ziemlich grobe, aber oft nützliche Abschätzung von $k!$ ergibt sich in einfachster Weise, indem man die Ungleichungen (s. **46a**)

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu < e < \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$ ansetzt und miteinander multipliziert.

und folglich[1]

$$\frac{1}{2^{4n}}\binom{4n}{n} < \frac{1}{2^{4n}}\cdot\frac{4n\,4^{4n}}{e\,3^{3n}} < 2n\left(\frac{16}{27}\right)^n.$$

Daher strebt sowohl T_1 wie T_3 mit wachsendem n gegen 0.

In T_2, d. h. für $n < \nu < 3n$, ist nach (B)

$$|s_\nu - s_{2n}| < \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}|2n-\nu|,$$

wenn wir mit ε_n den größten der Werte $|a_{n+1}|\sqrt{n+1}$, $|a_{n+2}|\sqrt{n+2}, \ldots$ bezeichnen, der mit wachsendem n noch gegen 0 streben muß. Daher ist

$$|T_2| \leq \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}\frac{1}{2^{4n}}\sum_{\nu=n+1}^{3n-1}|2n-\nu|\binom{4n}{\nu} < \frac{2\varepsilon_n}{2^{4n}\sqrt{n}}\sum_{\nu=0}^{2n}(2n-\nu)\binom{4n}{\nu}.$$

Für die letzte Summe ergibt sich aber leicht, indem man $2n-\nu$ in $2n$ und $-\nu$ trennt, der Wert $n\binom{4n}{2n}$. Also ist $|T_2| \leq \frac{2\varepsilon_n\sqrt{n}}{2^{4n}}\binom{4n}{2n}$.

Daher strebt mit wachsendem n wegen $\varepsilon_n \to 0$ und nach **219**, 3

$$T_2 \to 0.$$

Zusammen haben wir also

$$T_1 + T_2 + T_3 = s'_{4n} - s_{2n} \to 0.$$

Da nun nach Voraussetzung $s'_{4n} \to s$ strebt, so strebt auch $s_{2n} \to s$; und da nach (B) $a_\nu \to 0$ strebt, so folgt hieraus endlich die Beziehung

$$s_n \to s,$$

die zu beweisen war[2].

Zum Schluß wollen wir noch auf die Frage der E-Summierbarkeit des Produktes zweier E_1-summierbarer Reihen sowie auf die Frage nach dem Verhältnis des Wirkungsfeldes des E-Verfahrens zu dem des C-Verfahrens eingehen.

Bei dem Multiplikationsproblem gelten zwei Sätze, die genaue Analoga zu dem MERTENSschen Satz **188** und dem ABELschen Satz **189** darstellen. Wir begnügen uns mit der Durchführung des ersten und beweisen also den

---

[1] Man hat $\binom{4n}{n} = \frac{(4n)!}{n!\,(3n)!}$ zu setzen und im Zähler die obere, im Nenner die untere Abschätzung für $k!$ zu benutzen.

[2] Die Sätze **274** und **287** legen die Vermutung nahe, daß auch hier ein O-$E \to K$-Satz gilt, der also die Konvergenz von $\sum a_n$ aus ihrer E_1-Summierbarkeit schon dann zu erschließen gestattet, wenn $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ist. Das ist auch tatsächlich der Fall, doch ist der Beweis so erheblich viel schwieriger, daß wir hier auf seine Durchführung verzichten müssen. (Vgl. die zweite der S. 525, Fußnote 1, genannten Arbeiten.)

Satz 3. *Die beiden Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ seien E_1-summierbar, d. h. ihre E_1-Transformationen, die wir mit $\sum a'_n$ und $\sum b'_n$ bezeichnen wollen, seien konvergent. Wenn dann von den letzten Reihen wenigstens* e i n e *absolut konvergiert, so ist die* CAUCHY*sche Produktreihe* **292.**

$$\sum c_n \equiv \sum (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$$

gleichfalls E_1-summierbar, und zwischen den E_1-Summen A, B, C der drei Reihen besteht die zu erwartende Beziehung $A \cdot B = C$.

Beweis. Nach **265**, 5 ist für $x = \frac{y}{1-y}$ und hinreichend kleine Werte dieser Variablen (s. Satz 1)

$$f_1(x) = \sum a_n x^{n+1} = \sum a'_n (2y)^{n+1},$$
$$f_2(x) = \sum b_n x^{n+1} = \sum b'_n (2y)^{n+1},$$
$$f_3(x) = \sum c_n x^{n+1} = \sum c'_n (2y)^{n+1}.$$

Da andererseits

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = x \cdot f_3(x)$$

ist, so hat man die Identität

$$(2y) \cdot \sum (a'_0 b'_n + a'_1 b'_{n-1} + \cdots + a'_n b'_0)(2y)^{n+1} = \frac{y}{1-y} \sum c'_n (2y)^{n+1},$$

woraus sich neben $c'_0 = 2a'_0 b'_0$ allgemein für $n \geqq 1$

$$c'_n = 2(a'_0 b'_n + a'_1 b'_{n-1} + \cdots + a'_n b'_0) - (a'_0 b'_{n-1} + \cdots + a'_{n-1} b'_0)$$

ergibt. Da nun nach Voraussetzung wenigstens *eine* der beiden Reihen $\sum a'_n$ und $\sum b'_n$ *absolut* konvergiert, so ist nach **188** auch die CAUCHYsche Produktreihe $\sum (a'_0 b'_n + \cdots + a'_n b'_0)$ von beiden konvergent und $= A \cdot B$. Nach der letzten Darstellung von c'_n ergibt sich nun sofort die Konvergenz der Reihe $\sum c'_n$ und für ihre Summe C die Gleichung

$$C = 2AB - AB = AB,$$

die zu beweisen war[1].

Wir behandeln endlich noch die Frage nach dem Verhältnis zwischen dem C- und E-Verfahren. Da ist zunächst sehr leicht zu zeigen, daß sie die Verträglichkeitsbedingung **263**, III erfüllen; es gilt also der

Satz 4. *Wenn eine Reihe sowohl C_1- als auch E_1-summierbar ist, so wird ihr durch beide Verfahren der* g l e i c h e *Wert zugeordnet.* **293.**

Beweis. Ist (c'_n) die C_1- und (s'_n) die E_1-Transformation von s_n, so sind diese beiden Folgen nach Voraussetzung konvergent. Es strebe

[1] Der Gang dieses Beweises läßt es zweckmäßig erscheinen, für gewisse Fälle den Begriff der *absoluten* Summierbarkeit einzuführen: Wir werden eine Reihe $\sum a_n$ *absolut* E_1-summierbar nennen, wenn ihre E_1-Transformation $\sum a'_n$ *absolut* konvergiert.

etwa $c'_n \to c'$, $s'_n \to s'$. Da nun beide Verfahren die Permanenzbedingung erfüllen, so strebt auch die C_1-Transformation von (s'_n), also

$$\frac{s'_0 + s'_1 + \cdots + s'_n}{n + 1} \to s'$$

und ebenso die E_1-Transformation von (c'_n), also

$$\frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} c'_0 + \cdots + \binom{n}{n} c'_n\right] \to c'.$$

Kürzer geschrieben, gelten also die beiden Beziehungen

$$C_1 E_1(s_n) \to s' \qquad \text{und} \qquad E_1 C_1(s_n) \to c'.$$

Da nun, wie wir schon S. 527/528 hervorgehoben haben, die beiden letzten Folgen völlig identisch miteinander sind, so ist notwendig $s' = c'$, w. z. b. w.

Wir sahen nun aber schon oben (S. 526) an der geometrischen Reihe $\sum z^n$, daß das E_1-Verfahren erheblich stärker ist als das C-Verfahren. Denn dieses summiert die geometrische Reihe nirgends außerhalb des Einheitskreises, während das E_1-Verfahren sie in jedem Punkte des Kreises $|z + 1| < 2$ zu summieren vermag. Das ist indessen nicht so zu verstehen, daß das Wirkungsfeld des E_1-Verfahrens dasjenige des C_1-Verfahrens oder gar *aller* C_k-Verfahren umschließt. *Es läßt sich vielmehr leicht eine Folge* (s_n) *angeben, die zwar* C_1-, *aber nicht* E_1-*limitierbar ist.* Das leistet schon die Folge

$$(s_n) \equiv 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 3, 0, \ldots,$$

bei der $s_{\nu^2} = \nu$ und sonst (d. h. für alle Indizes n, die keine Quadratzahlen sind) $s_n = 0$ ist.

Diese Folge ist C_1-limitierbar zum Werte $\frac{1}{2}$. Denn die höchsten Werte der arithmetischen Mittel $\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n + 1}$ werden offenbar stets für $n = \nu^2$, die niedrigsten für $n = \nu^2 - 1$ angenommen. Da nun die letzteren $= \frac{\nu(\nu - 1)}{2\nu^2}$, die ersteren $= \frac{(\nu + 1)\nu}{2(\nu^2 + 1)}$ sind, so strebt $C_1(s_n) \to \frac{1}{2}$.

Wäre diese selbe Folge nun auch E_1-limitierbar, so müßte auch $E_1(s_n) \to \frac{1}{2}$ streben. Es ist aber für $n = \nu^2$ das $2n^{\text{te}}$ Glied der E_1-Transformation

$$= \frac{1}{2^{2n}}\left[\binom{2n}{0} s_0 + \cdots + \binom{2n}{n} s_n + \cdots + \binom{2n}{2n} s_{2n}\right] \geqq \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\sqrt{n}.$$

Der rechtsstehende Wert strebt nun nach **219**, 3 gegen $1 : \sqrt{\pi}$. Für alle hinreichend hohen n bleiben daher diese Glieder $> \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$, und folglich kann $E_1(s_n)$ nicht $\to \frac{1}{2}$ streben. Die Folge (s_n) ist *nicht* E_1-limitierbar. Wir können also sagen:

Satz 5. *Von den Wirkungsfeldern des C_1- und E_1-Verfahrens umfaßt keines völlig das andere. Es gibt Reihen, die zwar durch das eine Verfahren, aber nicht durch das andere summiert werden können*[1]. **294.**

Diese Sachlage regt noch die Frage an, welche C_1-summierbaren Reihen nun doch auch durch das E_1-Verfahren summiert werden können. Hierüber ist noch nicht viel bekannt, und wir begnügen uns mit dem Beweis des folgenden Satzes:

Satz 6. *Ist $\sum a_n$ eine C_1-summierbare Reihe, für die* **295.**

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n + 1} = s + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ist, so ist $\sum a_n$ auch E_1-summierbar. (o-$C_1 \to E_1$-Satz.)[2]

Beweis. Setzen wir $s_n - s = \sigma_n$, so ist nun die Folge (σ_n) C_1-limitierbar zum Werte 0. Setzen wir also

$$\frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_n}{n + 1} = \sigma'_n,$$

so strebt nach den Voraussetzungen nicht nur $\sigma'_n \to 0$, sondern sogar $\sqrt{n}\,\sigma'_n \to 0$. Nun gilt aber ganz allgemein die folgende von Abel herrührende Abschätzung: Sind $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *irgendwelche* Zahlen, $\sigma'_\nu = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_\nu}{\nu + 1}$, $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$, die zugehörigen arithmetischen Mittel, ist ferner τ eine Schranke aller $|\sigma'_\nu|$ für $\nu = 0, 1, \ldots, n$ und τ_k eine solche für die $|\sigma'_\nu|$ mit $k \leqq \nu \leqq n$, so ist

$$\left|\frac{\alpha_0\sigma_0 + \alpha_1\sigma_1 + \cdots + \alpha_n\sigma_n}{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right| \leqq \tau_m + \frac{\tau p\,\alpha_p + (\tau_p + \tau_m)\,m\,\alpha_m}{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n},$$

falls $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ beliebige positive Zahlen sind, die bis zum Gliede α_m monoton wachsen, hernach monoton fallen, und falls $0 < p < m < n$ ist[3].

---

[1] Die Aussage bleibt dieselbe, auch wenn die höheren Ordnungen der beiden Verfahren in Anspruch genommen werden.

[2] Ein entsprechender O-Satz gilt hier *nicht*, wie schon das zu Satz 5 gegebene Beispiel lehrt, bei dem die arithmetischen Mittel tatsächlich $= \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ sind.

[3] Es ist nämlich $\sigma_\nu = (\nu + 1)\sigma'_\nu - \nu\sigma'_{\nu-1}$ und also, wenn $\alpha_{n+1} = 0$ gesetzt wird,

$$\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \sigma_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (\nu + 1)\,\sigma'_\nu\,(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{p-1} + \sum_{\nu=p}^{m-1} + \sum_{\nu=m}^{n}.$$

Berücksichtigt man nun, daß in der ersten und zweiten Summe $(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})$ negativ, in der dritten positiv ist, so folgt

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu\sigma_\nu\right| \leq \tau p\,\alpha_p + \tau_p\,m\,\alpha_m + \tau_m\,(m\,\alpha_m + \alpha_m + \alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_n),$$

woraus die obige Beziehung abgelesen werden kann.

Wenden wir dies bei einem *festen* $n > 8$ auf unsere oben eingeführ- ten σ_ν und σ'_ν an und wählen speziell $\alpha_\nu = \binom{n}{\nu}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$, so kann für p die größte ganze Zahl $\leqq \frac{n}{4}$, also $p = \left[\frac{n}{4}\right]$ und ebenso $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ gesetzt werden. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0}\sigma_0 + \binom{n}{1}\sigma_1 + \cdots + \binom{n}{n}\sigma_n\right] \leqq \tau_m + \frac{\tau}{2^n} p \binom{n}{p} + \frac{2\tau_p}{2^n} m \binom{n}{m},$$

und dies gilt um so mehr, wofern man unter τ jetzt eine Schranke *aller* $|\sigma'_\nu|$ und unter τ_k eine solche für *alle* $|\sigma'_\nu|$ mit $\nu \geqq k$ versteht. Nun gilt aber nach **219**, 3 für das Maximalglied $\binom{n}{m}$ der Werte $\binom{n}{\nu}$, daß

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{m} \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

strebt, also jedenfalls von einer Stelle an < 1 ist. Da von einer Stelle an auch $\sqrt{n} < 3\sqrt{p}$ ist, so ist für alle hinreichend großen n

$$\frac{2\tau_p}{2^n} m \binom{n}{m} < \tau_p \sqrt{n} < 3\tau_p \sqrt{p}.$$

Da nun $\tau_p \sqrt{p} \to 0$ streben sollte, da ferner p und m zugleich mit $n \to +\infty$ rücken und hierbei endlich auch $\frac{p}{2^n}\binom{n}{p} \to 0$ strebt, so folgt, daß für $n \to +\infty$

$$\frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0}\sigma_0 + \binom{n}{1}\sigma_1 + \cdots + \binom{n}{n}\sigma_n\right] \to 0$$

oder

$$E_1(s_n) \to s$$

strebt, w. z. b. w.

Aufgaben zum XIII. Kapitel.

200. Man beweise mit Hilfe von Aufgabe 119 (S. 280) die auf S. 477 erwähnte Tatsache, daß

$$\lim_{x \to +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \frac{1}{2}$$

ist. Welches dem A-Verfahren verwandte Summierungsverfahren ließe sich hieran anknüpfen? Man definiere es und gebe einige Eigenschaften desselben an!

201. Ist die bei **273** angegebene Bedingung

$$C_k\text{-}\lim \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n+1} = 0$$

a) mit C_{k+1}-$\lim (n a_n) = 0$, b) mit C_k-$\lim \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n} = 0$

sachlich gleichbedeutend?

202. Im Anschluß an die Beziehungen (*) bei **284** zeige man allgemein, daß aus A-lim $s_n = s$ stets AC_k-lim $s_n = s$ folgt, d. h. also, daß aus

$$(1 - x)\sum s_n x^n \to s \qquad \text{stets} \qquad (1 - x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} x^n \to s$$

folgt (bei $x \to 1 - 0$).

203. Man zeige analog, daß aus B-lim $s_n = s$ stets BC_k-lim $s_n = 0$, d. h.

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} \cdot \frac{x^n}{n!} \to s$$

für $x \to +\infty$ folgt.

204. Sind die in den Aufgaben 202 und 203 genannten Schlüsse umkehrbar, folgt also z. B. aus $(1 - x)\sum \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n + 1} x^n \to s$ rückwärts, daß schon $(1 - x)\sum s_n x^n \to s$ strebt?

205. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n$ ist für $|z| = 1$, $z \neq +1$ noch C_k-summierbar. Man setze $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$, trenne Reelles und Imaginäres und gebe die dadurch summierten trigonometrischen Reihen sowie ihre Werte an. Es ist speziell

$$1 + 2\cos x + 3\cos 2x + 4\cos 3x + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \cdots = -\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \quad \text{u. a.}$$

206. Ist (a_n) eine positive monotone Nullfolge und wird

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_n$$

gesetzt, so ist

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + - \cdots$$

C_1-summierbar mit der Summe $s = \frac{1}{2}\sum(-1)^n a_n$.

207. Setzt man $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = h_n$, so findet man nach der vorigen Aufgabe die C_1-Summe

$$h_1 - h_2 + h_3 - h_4 + - \cdots = \tfrac{1}{2}\log 2$$

und ähnlich die C_1-Summe

$$\log 2 - \log 3 + \log 4 - + \cdots = \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2}.$$

208. Ist $\sum a_n$ konvergent oder C_1-summierbar mit der Summe s, so ist die folgende Reihe stets *konvergent* mit der Summe s:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n(n+1)} = s.$$

209. Ist $\sum a_n$ als C_1-summierbar bekannt und ist $\sum n |a_n|^2$ konvergent, so ist auch $\sum a_n$ selbst konvergent.

210. Von dem FROBENIUSschen Satz (S. 508) gelten auch die folgenden Erweiterungen: Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ C_1-summierbar mit der Summe s, so strebt für $z \to +1$ (im Winkelraum) auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n^2} \to s \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n^3} \to s$$

und allgemein für festes ganzzahliges $p \geq 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^p} \to s.$$

Dagegen braucht $\sum a_n z^{n!}$ nicht mehr $\to s$ zu streben, wie an dem Beispiel

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n!}$$

für reelle $x \to 1-0$ gezeigt werden kann. (Anl.: Das Maximum von $t - t^n$ und der Wert von t, für den es eintritt, rücken mit wachsendem n beide von links her $\to +1$).

211. Für jede *reelle* Reihe $\sum a_n$, für die $\sum a_n x^n$ in $0 \leq x < 1$ konvergent ist, ist

$$\varliminf_{n \to +\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \leq \varlimsup_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \leq \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}.$$

(Vgl. Satz **161**.)

212. In Anschluß an den FEJÉRschen Satz soll bewiesen werden, daß bei den dort betrachteten arithmetischen Mitteln $\sigma_n(x)$ die GIBBSsche Erscheinung nicht eintritt. (Vgl. S. 514, Fußnote 1.)

213. Das Produkt zweier E_1-summierbarer Reihen ist *stets* $E_1 C_1$-summierbar.

214. Ist $\sum a_n$ eine E_1-summierbare Reihe, so ist $\sum a_n x^n$ auch für jedes $0 \leq x < 1$ noch E_1-summierbar, und es ist

$$\lim_{x-1-0} (E_1\text{-}\sum a_n x^n) = E_1\text{-}\sum a_n.$$

215. Man beweise allgemein die Vertauschbarkeit des E_p-Verfahrens mit dem C_q-Verfahren.

216. Man beweise den o-$E_p \to K$-Satz (wie lautet er?) durch Induktion aus dem o-$E_1 \to K$-Satz.

XIV. Kapitel.

Die Eulersche Summenformel. Asymptotische Entwicklungen.

§ 64. Die Eulersche Summenformel.

A. Die Summenformel.

Das Wirkungsfeld aller Summierungsverfahren, die im letzten Kapitel betrachtet wurden, war begrenzt. Nur wenn die Glieder a_n der vorgelegten divergenten Reihe mit n nicht zu schnell anwuchsen, konnte die Reihe summiert werden. So war es im Falle des B-Verfahrens notwendig, daß $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ beständig konvergierte, daß also $\frac{1}{n} \sqrt[n]{|a_n|} \to 0$ strebte. Daher ist z. B. die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! = 1 - 1! + 2! - 3! + 4! - + \cdots + (-1)^n n! + \cdots$$

nicht B-summierbar. Reihen wie diese und noch stärker divergente Reihen traten aber schon früh bei den mannigfachsten Untersuchungen auf. Um sie nach den bisherigen Methoden zu beherrschen, müßten also noch stärkere Verfahren wie etwa das B_r-Verfahren herangezogen werden. Doch sind auf diesem Wege keine wesentlichen Resultate erzielt worden.

Ziemlich früh sind indessen schon andere Methoden angegeben worden, die in gewissen Fällen leichter zu theoretisch und praktisch brauchbaren Ergebnissen geführt haben. Bei der numerischen Auswertung der Summe einer alternierenden Reihe $\sum (-1)^n a_n$, in der die a_n eine positive monotone Nullfolge bilden, wurde schon hervorgehoben (s. S. 259), daß der Rest r_n immer dasselbe Vorzeichen wie das erste vernachlässigte Glied hat und daß er absolut genommen kleiner als dieses ist. Daher braucht man die Berechnung der Teilsummen nur so weit durchzuführen, bis die Glieder unter den gewünschten Genauigkeitsgrad gesunken sind. Ähnlich liegt es bei der Reihe

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad (x > 0),$$

da die Glieder $\frac{x^n}{n!}$ für $n > x$ ebenfalls monoton abnehmen. Man darf daher für jedes $n > x$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + (-1)^{n+1} \vartheta \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

setzen, wenn ϑ einen nicht näher bekannten (von x und n abhängigen) Wert zwischen 0 und 1 bedeutet. Es ist aber praktisch unmöglich, für große x den Wert von e^{-x} hiernach zu berechnen. Denn z. B. für $x = 1000$ ist das tausendste Glied $= \frac{10^{3000}}{1000!}$; und da $1000!$ eine 2568-stellige Zahl ist (wegen der Berechnung vgl. S. 547), so ist das genannte Glied $> 10^{431}$ Die Berechnung der Reihensumme ist also praktisch undurchführbar. Theoretisch dagegen erfüllt die Reihe alles, was man nur wünschen kann, da ihre Glieder (die für große x zunächst stark anwachsen) schließlich doch zu Null abnehmen, und *zwar für jeden Wert von x*. Daher kann *jeder nur irgend gewünschte Genauigkeitsgrad* wenigstens theoretisch erreicht werden.

Genau umgekehrt liegen die Dinge, wenn z. B. der Wert einer Funktion $f(x)$ für jedes x und n durch die Formel

$$f(x) = 1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{x^n} + (-1)^{n+1} \vartheta \frac{(n+1)!}{x^{n+1}},$$
$$(0 < \vartheta < 1),$$

dargestellt wird. Die Reihe $\sum (-1)^n \frac{n!}{x^n}$, deren Teilsumme hier auftritt, *divergiert für jedes x*. Aber *im Gegensatz zu allen divergenten Reihen, die wir im vorigen Kapitel angetroffen haben*, nehmen (bei großem x) die Glieder dieser Reihe zunächst stark ab, die Reihe benimmt sich zunächst wie eine konvergente Reihe; erst später wachsen sie schnell und über alle Grenzen. Daher kann man z. B. $f(1000)$ leicht auf 10 Dezimalen genau berechnen. Man hat nur n so zu wählen, daß $\frac{(n+1)!}{1000^{n+1}} < \frac{1}{2}\, 10^{10}$ ist. Da dies schon für $n = 3$ der Fall ist, wird der gesuchte Wert durch

$$1 - \frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^6} - \frac{6}{10^9}$$

mit der gewünschten Genauigkeit geliefert. Es liegt also so, daß hier eine Entwicklungsformel, die ins Unendliche fortgesetzt eine beständig divergente Potenzreihe liefern würde, trotzdem numerisch gut brauchbare Resultate ergibt, *weil in ihr ein Restglied auftritt*. Man ist aber nicht in der Lage — nicht einmal theoretisch —, aus ihr den Wert von $f(x)$ *mit beliebiger Genauigkeit* zu berechnen, da die Formel diesen Wert nur mit einem Fehler liefert, der von der Größenordnung eines der Glieder der Reihe ist. Die Genauigkeit kann daher nicht unter den Wert des *kleinsten* Gliedes der Reihe (das sicher existiert, da ja die Glieder schließlich anwachsen) herabgedrückt werden. Doch lehrt dies Beispiel, daß unter günstigen Umständen alle *praktischen* Bedürfnisse gleichwohl befriedigt sein können.

Entwicklungen der beschriebenen Art traten zum ersten Male im Zusammenhang mit der EULERschen Summenformel auf[1], der wir uns zunächst zuwenden wollen.

Wenn die Glieder $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ einer Reihe[2] die Werte einer Funktion $f(x)$ für $x = 0, 1, \ldots, n, \ldots$ sind, so sahen wir schon beim Integralkriterium **176**, daß in gewissen Fällen die Teilsummen $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ und die Integrale

$$J_n = \int_0^n f(x)\, dx$$

in naher Beziehung zueinander stehen. Die EULERsche Summenformel klärt diesen Zusammenhang genauer. Hat $f(x)$ in $0 \leq x \leq n$ eine stetige Ableitung, so ist für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\int_\nu^{\nu+1} (x - \nu - \tfrac{1}{2})\, f'(x)\, dx = \left[(x - \nu - \tfrac{1}{2})\, f(x)\right]_\nu^{\nu+1} - \int_\nu^{\nu+1} f(x)\, dx.$$

Für jeden der Werte ν kann nun im Integranden links $\nu = [x]$ gesetzt werden, wenigstens für $\nu \leq x < \nu + 1$. Da es aber auf den einen Wert desselben für $x = \nu + 1$ nach § 19, Satz 17 nicht ankommt, so ist

$$\tfrac{1}{2}(f_\nu + f_{\nu+1}) = \int_\nu^{\nu+1} f(x)\, dx + \int_\nu^{\nu+1} (x - [x] - \tfrac{1}{2})\, f'(x)\, dx.$$

(Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, sollen die Werte der Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitungen $f^{(k)}(x)$ für die ganzzahligen Werte $x = \nu$ kurz durch f_ν bzw. $f_\nu^{(k)}$ bezeichnet werden). Addiert man nun über die genannten Werte von ν und fügt beiderseits $\frac{1}{2}(f_0 + f_n)$ hinzu, so erhält man schließlich die Formel **296.**

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_n = \int_0^n f(x)\, dx + \frac{1}{2}(f_0 + f_n) + \int_0^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\, dx.$$

Das ist die EULERsche Summenformel in ihrer einfachsten Form[3]. Sie

[1] Bezüglich der Summenformel vgl. die nachfolgende Fußn. 3. Die beschriebene Erscheinung wurde zuerst von EULER (Commentarii Acad. sc. Imp. Petropolitanae, Bd. 11, Jg. 1739, S. 116, 1750) bemerkt. A. M. LEGENDRE nannte die Reihen der beschriebenen Art *semi-konvergent*. Diese Bezeichnung ist auch gegenwärtig, besonders in der astronomischen Literatur, noch in Gebrauch, doch wird sie neuerdings durch die Bezeichnung *„asymptotische Reihen"*, die von H. POINCARÉ auf Grund einer andern Eigenschaft solcher Reihen eingeführt wurde, verdrängt.

[2] Im folgenden sollen zunächst alle Größen reell gedacht werden.

[3] Die Formel geht in ihrer allgemeinen Form **298** auf EULER zurück, der sie beiläufig in den Commentarii Acad. Petrop. Bd. 6 (Jg. 1732—33, 1738) erwähnt und an einigen Beispielen erläutert. In Bd. 8 (Jg. 1736), erschienen 1741, beweist er die Formel. C. MACLAURIN gebraucht die Formel mehrfach in seinem Treatise of Fluxions (Edinburgh 1742) und scheint sie unabhängig gefunden zu haben. Bekannt wurde die Formel hauptsächlich durch EULERs Institutiones calculi differentialis, in dessen fünftem Kapitel sie bewiesen und an Beispielen erläutert

liefert einen geschlossenen Ausdruck für die Differenz zwischen der Summe $f_0 + f_1 + \cdots + f_n$ und dem entsprechenden Integral $\int_0^n f(x)\,dx$.

Die Funktion, die in dem letzten Integranden auftritt, bezeichnen wir mit $P_1(x)$:

$$P_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}.$$

Es ist wesentlich dieselbe Funktion wie die, die uns als eines der ersten Beispiele für die Entwicklungen in FOURIERreihen begegnete (s. S. 361 u. 387). Sie ist periodisch mit der Periode 1, und für jedes nicht-ganze x ist

$$P_1(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}.$$

Ein einfaches Beispiel mag sogleich die Bedeutung der Formel illustrieren. Ist $f(x) = \frac{1}{1+x}$, so erhält man, wenn noch n durch $n-1$ ersetzt wird,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{P_1(x)}{x^2}\,dx.$$

Hierbei durfte das letzte Integral an Stelle von $\int_0^{n-1} \frac{P_1(x)}{(1+x)^2}\,dx$ gesetzt werden, weil $P_1(x+1) = P_1(x)$ ist. Da $P_1(x)$ für $x \geqq 1$ beschränkt ist, konvergiert das Integral offenbar für $n \to +\infty$. Man findet so:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = C = \frac{1}{2} - \int_1^{\infty} \frac{P_1(x)}{x^2}\,dx.$$

Wir wissen bereits aus **128**, 2, daß dieser Grenzwert existiert. Jetzt haben wir nicht nur einen neuen Beweis für diese Tatsache, sondern darüber hinaus für die EULERsche Konstante C eine geschlossene Integraldarstellung, mit deren Hilfe man C numerisch berechnen kann.

Von der gewonnenen Formel **296**, d. h. von

$$(*)\quad f_0 + f_1 + \cdots + f_n = \int_0^n f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}(f_0 + f_n) + \int_0^n P_1(x) f'(x)\,dx$$

gelangt man durch partielle Integration zu günstigeren Darstellungen.

---

ist. Lange Zeit war sie als MACLAURINsche oder EULER-MACLAURINsche Formel bekannt. Erst neuerdings ist EULERS Priorität als unbestreitbar nachgewiesen.

Das Restglied — also ein sehr wesentlicher Teil der Formel — wurde erst von S. D. POISSON (s. Mémoires Acad. scienc. Inst. France, Bd. 6, Jg. 1823, erschienen 1827) hinzugefügt. Den besonders einfachen Beweis des Textes verdankt man W. WIRTINGER (Acta mathematica, Bd. 26, S. 255, 1902).

Eine ausführliche und auf alle Einzelheiten eingehende Darstellung, die dem heutigen Stande der Wissenschaft entspricht, findet man in N. E. NÖRLUND: Differenzenrechnung, Berlin 1924, besonders in den Kapiteln II—V.

Dazu müssen wir erstlich voraussetzen, daß $f(x)$ stetige Ableitungen all der Ordnungen besitzt, die im folgenden auftreten, und wir müssen zweitens ein unbestimmtes Integral von $P_1(x)$ auswählen, von diesem wiederum eines usw. Durch geeignete Wahl der dabei zur Verfügung stehenden Konstanten können die Rechnungen erheblich vereinfacht werden. Wir folgen W. WIRTINGER[1] und setzen

$$P_2(x) = + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2 n \pi x}{(2 n \pi)^2}.$$

Für jeden nicht-ganzen Wert von x ist dann $P_2'(x) = P_1(x)$ und

$$P_2(0) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{12}.$$

Überdies ist $P_2(x)$ durchweg stetig und hat die Periode 1. Wir setzen weiter

$$P_3(x) = + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin 2 n \pi x}{(2 n \pi)^3},$$

so daß $P_3'(x) = P_2(x)$ für *jedes* x und $P_3(0) = 0$ ist. Allgemein setzen wir

(a) $$\begin{cases} P_{2\lambda}(x) = (-1)^{\lambda-1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cos 2 n \pi x}{(2 n \pi)^{2\lambda}}, \\ P_{2\lambda+1}(x) = (-1)^{\lambda-1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \sin 2 n \pi x}{(2 n \pi)^{2\lambda+1}}. \end{cases}$$ **297.**

Für $\lambda = 1, 2, \ldots$ sind diese Funktionen sämtlich durchweg stetig und stetig differenzierbar; sie haben die Periode 1, und es ist für alle x

(b) $$\begin{cases} P_{k+1}'(x) = P_k(x), \qquad (k = 2, 3, \ldots), \\ P_{2\lambda}(0) = (-1)^{\lambda-1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{(2 n \pi)^{2\lambda}} = \dfrac{B_{2\lambda}}{(2\lambda)!}, \qquad P_{2\lambda+1}(0) = 0 \end{cases}$$

für $\lambda = 1, 2, \ldots$ (vgl. **136**). Wie aus der Definition ferner hervorgeht, sind die $P_k(x)$ für $k \geqq 2$ in $0 \leqq x \leqq 1$ ganze rationale Funktionen. Neben $P_1(x) = x - \frac{1}{2}$ in $0 < x < 1$ hat man in $0 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} &&= \frac{x^2}{2!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x}{1!} + \frac{B_2}{2!}, \\ P_3(x) &= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} &&= \frac{x^3}{3!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^2}{2!} + \frac{B_2}{2!}\frac{x}{1!}, \\ P_4(x) &= \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720} &&= \frac{x^4}{4!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^3}{3!} + \frac{B_2}{2!}\frac{x^2}{2!} + \frac{B_4}{4!}. \end{aligned}$$

[1] Vgl. die vorangehende Fußnote.

Allgemein ist, wie man durch vollständige Induktion leicht bestätigt,

$$P_k(x) = \frac{x^k}{k!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{B_2}{2!}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + \cdots + \frac{B_k}{k!}$$

$$= \frac{1}{k!}\left\{\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}B_1 x^{k-1} + \binom{k}{2}B_2 x^{k-2} + \cdots \right.$$

$$\left. + \binom{k}{k-1}B_{k-1}x + \binom{k}{k}B_k\right\}$$

oder

(c) $$P_k(x) = \frac{1}{k!}(x+B)^k,$$

falls wir die schon in **105** eingeführte symbolische Bezeichnung benutzen. Das sind die sogenannten *Bernoullischen Polynome*[1], die in vielen Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen[2]. Einige ihrer Eigenschaften werden wir alsbald kennen lernen.

Zuvor aber soll die Formel (*) mit Hilfe dieser Polynome verbessert werden. Partielle Integration liefert

$$\int_0^n P_1(x)f'(x)\,dx = [P_2 f']_0^n - \int_0^n P_2 f''\,dx$$

$$= \frac{B_2}{2!}(f'_n - f'_0) - [P_3 f'']_0^n + \int_0^n P_3 f'''\,dx$$

$$= \frac{B_2}{2!}(f'_n - f'_0) + \int_0^n P_3 f'''\,dx$$

und allgemein

$$\int_0^n P_{2\lambda-1}f^{(2\lambda-1)}dx = \frac{B_{2\lambda}}{(2\lambda)!}\left(f_n^{(2\lambda-1)} - f_0^{(2\lambda-1)}\right) + \int_0^n P_{2\lambda+1}f^{(2\lambda+1)}dx$$

für $\lambda \geqq 1$. Für jedes $k \geqq 0$ haben wir also, wenn nur die auftretenden Ableitungen von $f(x)$ existieren und stetig sind:

298. $$f_0 + f_1 + \cdots + f_n = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f_n + f_0)$$

$$+ \frac{B_2}{2!}(f'_n - f'_0) + \frac{B_4}{4!}(f'''_n - f'''_0) + \cdots$$

$$+ \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f_n^{(2k-1)} - f_0^{(2k-1)}\right) + R_k,$$

[1] Sie treten zuerst bei Jakob Bernoulli: Ars conjectandi, Basel 1713, auf. Dort erscheinen die Polynome als Ergebnis eines speziellen Summierungsproblems, das weiter unten in B, 1 behandelt wird.

[2] Manche Autoren bezeichnen das Polynom $\varphi_k(x) = (x+B)^k - B^k$ als k^{tes} Bernoullisches Polynom; andre wiederum bezeichnen damit das Polynom

$$\psi_k(x) = \frac{(x+B)^{k+1} - B^{k+1}}{k+1}.$$

Diese Abweichungen sind unwesentlich.

wo zur Abkürzung

$$R_k = \int_0^n P_{2k+1}(x) f^{(2k+1)}(x)\, dx$$

gesetzt wurde. Das ist die EULERsche Summenformel.

Bemerkungen.

1. Da bei der letzten partiellen Integration,

$$-\int_0^n P_{2k} f^{(2k)}\, dx = -\left[P_{2k+1} f^{(2k)}\right]_0^n + \int_0^n P_{2k+1} f^{(2k+1)}\, dx,$$

der ausintegrierte Teil verschwindet (denn es ist $P_{2k+1}(n) = P_{2k+1}(0) = 0$), so darf man für das Restglied der Summenformel auch

$$R_k = -\int_0^n P_{2k}(x)\, f^{(2k)}(x)\, dx$$

schreiben.

2. Setzt man $F(a + x h) = f(x)$, so erhält die Formel eine etwas allgemeinere Form, in der

$$F(a) + F(a + h) + \cdots + F(a + n h)$$

die linke Seite bildet. Die Formel kann daher unter sonst gleichen Annahmen zur Summierung irgendwelcher äquidistanter Funktionswerte benutzt werden.

3. Unter passenden Einschränkungen kann man in der Summenformel $n \to +\infty$ rücken lassen. Je nachdem $\sum f_n$ konvergiert oder divergiert, erhält man dadurch einen Ausdruck für die Summe der Reihe oder für das Anwachsen ihrer Teilsummen. Das Ergebnis ist für jeden Wert von k (rechter Hand) ein andres.

4. Für $k \to +\infty$ *kann* R_k gegen 0 streben. Man erhält dann rechts eine unendliche Reihe, in die die links stehende Summe transformiert worden ist. Indessen tritt dieser Fall nur selten ein, da die BERNOULLIschen Zahlen (s. S. 245, Fußnote) sehr schnell anwachsen. Tatsächlich fällt die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f_n^{(2k-1)} - f_0^{(2k-1)}\right)$$

bei fast allen in den Anwendungen auftretenden Funktionen $f(x)$, und zwar für jedes n, divergent aus. So legt die Formel *ein Summierungsverfahren für divergente Reihen* nahe. Vgl. jedoch das nachstehende Beispiel B, 3.

5. Wenn die Differenzen $(f_n^{(2\lambda-1)} - f_0^{(2\lambda-1)})$ sämtlich dasselbe Vorzeichen haben, ist die eben erwähnte Reihe alternierend, da die Zahlen $B_{2\lambda}$ abwechselnde Vorzeichen haben. Es wird sich zeigen, daß in diesem Falle die in 4 erwähnte Reihe trotz ihrer Divergenz bezüglich der Restabschätzung sich wie eine konvergente, alternierende Reihe verhält (vgl. die einleitenden Absätze dieses §).

6. Die Formel wird nur dann brauchbar sein, wenn für ein passendes k der Rest $|R_k|$ unter dem gewünschten Genauigkeitsgrad liegt. Zunächst steht uns aber zu seiner Abschätzung nur die Ungleichung

$$P_k(x)| \leqq \frac{2}{(2\pi)^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leqq \frac{4}{(2\pi)^k}$$

zur Verfügung ($k \geqq 2$). Daß diese auch für $k = 1$ gilt, ist klar, da ja stets $|P_1(x)| \leqq \frac{1}{2}$ ist. Nach **136** kann ihr für gerade k noch die schärfere Form $|P_k(x)| \leqq \frac{|B_k|}{k!}$ gegeben werden.

B. Anwendungen.

299. 1. Es ist klar, daß die Formel die günstigsten Resultate liefert, wenn die höheren Ableitungen von $f(x)$ sehr klein, besonders also wenn sie 0 sind. Daher wählen wir zuerst $f(x) = x^p$, ($p \geqq 1$ ganz). Die Formel liefert

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \int_0^n x^p dx + \frac{1}{2} n^p + \frac{B_2}{2!} p n^{p-1} + \cdots$$

Hier ist die Reihe rechter Hand bei der letzten *positiven* Potenz von n abzubrechen, denn $(f_n^{(k)} - f_0^{(k)})$ verschwindet nicht nur, wenn $f^{(k)}(x) \equiv 0$, sondern auch schon (nach **297**b) wenn es identisch konstant ist. Bringt man noch das Glied n^p nach rechts, so erhält man

$$\begin{aligned} &1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p \\ &= \frac{1}{p+1}\left\{n^{p+1} + \binom{p+1}{1} B_1 n^p + \binom{p+1}{2} B_2 n^{p-1} + \cdots\right\} \end{aligned}$$

oder, da innerhalb der Klammer rechter Hand kein konstantes Glied auftritt,

$$\boldsymbol{1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p = \frac{1}{p+1}\{(n+B)^{p+1} - B^{p+1}\}.}$$

2. **Die behandelten Summen können auch auf dem folgenden, ganz** andersgearteten Wege gewonnen werden: Entwickelt man in der Summe

$$1 + e^t + e^{2t} + \cdots + e^{(n-1)t}$$

jedes Glied nach Potenzen von t, so ist der Koeffizient von $\frac{t^p}{p!}$ offenbar gleich

$$1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p.$$

Andrerseits ist — unter Benutzung der symbolischen Schreibweise (s. **105**, 5) — die erste Summe gleich

$$\frac{e^{nt} - 1}{e^t - 1} = \frac{e^{nt} - 1}{t} e^{Bt} = \frac{e^{(n+B)t} - e^{Bt}}{t}.$$

Als Koeffizient von $\frac{t^p}{p!}$ und folglich als Wert der Summe

$$1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p$$

erhält man hiernach unmittelbar wieder den Ausdruck

$$\frac{1}{p+1}\{(n+B)^{p+1} - B^{p+1}\}.$$

3. Wird $f(x) = e^{\alpha x}$ und $n = 1$ genommen, so liefert die Formel

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^\alpha + 1) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} \alpha^{2\nu-1}(e^\alpha - 1) \\ + \alpha^{2k+1} \int_0^1 P_{2k+1}(x) \cdot e^{\alpha x} dx, \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = 1 - \frac{\alpha}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}\alpha^{2\nu} + \frac{\alpha^{2k+2}}{e^\alpha - 1}\int_0^1 P_{2k+1}(x)\, e^{\alpha x}\, dx.$$

Da hier nach **298**, 6 sofort zu erkennen ist, daß das Restglied $\to 0$ strebt, wofern nur $|\alpha| < 2\pi$ ist, so hat man für diese α

$$\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = 1 - \frac{\alpha}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}\alpha^{2\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{B_\lambda}{\lambda!}\alpha^\lambda,$$

eine Entwicklung, die wir in **105** auf ganz andrem Wege erhalten hatten.

Ähnlich erhält man die Entwicklung **115** für $\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, wenn man $f(x) = \cos\alpha x$ und $n = 1$ nimmt.

4. Wählt man $f(x) = \frac{1}{1+x}$, so erhält man, wenn noch n durch $(n-1)$ ersetzt wird,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{B_2}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{B_4}{4}\left(1 - \frac{1}{n^4}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{B_{2k}}{2k}\left(1 - \frac{1}{n^{2k}}\right) - (2k+1)!\int_1^n \frac{P_{2k+1}(x)}{x^{2k+2}}\, dx.$$

Da man hier, genau wie S. 540, $n \to +\infty$ rücken lassen darf, erhält man den folgenden verbesserten Ausdruck für die EULERsche Konstante:

$$\boldsymbol{C = \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \cdots + \frac{B_{2k}}{2k} - (2k+1)!\int_1^\infty \frac{P_{2k+1}(x)}{x^{2k+2}}\, dx.}$$

In diesem Falle strebt das Restglied für $k \to +\infty$ sicher *nicht* gegen 0. Die Reihe $\sum \frac{B_{2k}}{2k}$ divergiert sehr stark, — so stark, daß die zugehörige Potenzreihe $\sum \frac{B_{2k}}{2k} x^{2k}$ sogar beständig divergiert; nach **136** ist nämlich

$$|B_{2k}| = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\eta \quad \text{mit} \quad 1 < \eta < 2.$$

Trotzdem kann C mit Hilfe des obigen Ausdrucks sehr genau berechnet werden (vgl. Bem. 6). Nimmt man z. B. $k = 3$, so hat man zunächst

$$\text{(a)} \qquad C = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{120} + \frac{1}{252} - 7!\int_1^\infty \frac{P_7(x)}{x^8}\, dx.$$

Nimmt man nun von dem Integral nur den Teil von $x = 1$ bis $x = 4$, so ist der Betrag des Fehlers

$$\leqq 7!\,\frac{4}{(2\pi)^7}\int\limits_4^\infty \frac{dx}{x^8} = \frac{4\cdot 7!}{(2\pi)^7\cdot 7\cdot 4^7} < 10^{-6}.$$

Daher ist

$$C = \frac{1459}{2520} - 7!\int\limits_1^4 \frac{P_7(x)}{x^8}\,dx + \frac{\eta}{10^6} \quad \text{mit} \quad |\eta| < 1.$$

Der Wert des letzten Integrals wird nun wiederum von der Ausgangsformel geliefert, wenn man dort $n = 4$ setzt. Hiernach ist nämlich

$$-7!\int\limits_1^4 \frac{P_7(x)}{x^8}\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \log 4$$
$$- \frac{1459}{2520} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{12\cdot 4^2} - \frac{1}{120\cdot 4^4} + \frac{1}{252\cdot 4^6}.$$

Also ist

$$0{,}5772146 < C < 0{,}5772168.$$

Auf diesem Wege kann man ersichtlich C mit viel größerer Genauigkeit berechnen als zuvor — theoretisch sogar *mit jeder beliebigen Genauigkeit*. Doch ist zu beachten, daß dieser günstige Umstand allein darin seinen Grund hat, daß wir die Logarithmen als bekannt ansehen durften.

5. Wählt man $f(x) = \log(1+x)$, ersetzt wieder n durch $(n-1)$ und verfährt im übrigen wie bei den bisherigen Beispielen, so liefert **298** zunächst für $k = 0$

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log n = \int\limits_1^n \log x\,dx + \frac{1}{2}\log n + \int\limits_1^n \frac{P_1(x)}{x}\,dx$$

oder

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - (n-1) + \int\limits_1^n \frac{P_1(x)}{x}\,dx.$$

Partielle Integration liefert

$$\int\limits_1^n \frac{P_1(x)}{x}\,dx = \left[\frac{P_2(x)}{x}\right]_1^n + \int\limits_1^n \frac{P_2(x)}{x^2}\,dx$$

und zeigt, daß das Integral für $n \to +\infty$ konvergiert. Daher dürfen wir setzen

(*) $$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \gamma_n$$

und wissen, daß der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$$

existiert. Sein Wert ergibt sich folgendermaßen: Nach (*) ist

$$\begin{aligned} 2\log(2\cdot 4\cdot\ldots 2n) &= 2n\log 2 + 2\log n! \\ &= 2n\log 2 + (2n+1)\log n - 2n + 2\gamma_n \\ &= (2n+1)\log 2n - 2n - \log 2 + 2\gamma_n \end{aligned}$$

und

$$\log(2n+1)! = \left(2n+\frac{3}{2}\right)\log(2n+1) - (2n+1) + \gamma_{2n+1}.$$

Durch Subtraktion erhält man hieraus

$$\log\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots 2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1} = (2n+1)\log\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) - \frac{1}{2}\log(2n+1)$$
$$+ 1 - \log 2 + 2\gamma_n - \gamma_{2n+1}.$$

Bringt man nun noch das Glied $\frac{1}{2}\log(2n+1)$ nach links und läßt $n \to +\infty$ gehen, so folgt unter Benutzung des WALLISschen Produktes (s. **219**, 3), daß

$$\log\sqrt{\frac{\pi}{2}} = -1 + 1 - \log 2 + 2\gamma - \gamma,$$

also

$$\gamma = \log\sqrt{2\pi}$$

ist. Daher hat man schließlich

$$(**) \qquad \log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} - \int_n^\infty \frac{P_1(x)}{x}\,dx.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Modul M der BRIGGSschen Logarithmen (s. S. 265) und bezeichnet diese letzteren mit Log, so hat man

$$\operatorname{Log} n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} n - nM + \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} - M\int_n^\infty \frac{P_1(x)}{x}\,dx.$$

Dies liefert z. B. für $n = 1000$

$$\operatorname{Log} 1000! = 3001{,}5 - 434{,}29448\cdots + 0{,}39908\cdots - M\int_{1000}^\infty \frac{P_1(x)}{x^2}\,dx.$$

Da

$$\left|M\int_{1000}^\infty \frac{P_1(x)}{x}\,dx\right| \le M\left[\frac{P_2(x)}{x}\right]_{1000}^\infty + \left|M\int_{1000}^\infty \frac{P_2(x)}{x^2}\,dx\right|$$
$$\le \frac{4}{(2\pi)^2}\cdot\frac{M}{1000} + \frac{4}{(2\pi)^2}\cdot\frac{M}{1000} < \frac{1}{10000},$$

so ergibt sich, daß

$$\operatorname{Log} 1000! = 2567{,}6046\ldots$$

ist mit einem Fehler, der absolut genommen $< 10^{-4}$ bleibt. Hiernach ist $1000!$ eine Zahl, die mit $402\ldots$ beginnt und 2568 Stellen hat.

Genau wie in den vorangehenden Beispielen läßt sich die Formel (**) noch durch partielle Integration erheblich verbessern. Da

$$\int_n^\infty \frac{P_\lambda(x)}{x^\lambda}\,dx = \frac{P_{\lambda+1}(0)}{n^\lambda} + \lambda \int_n^\infty \frac{P_{\lambda+1}(x)}{x^{\lambda+1}}\,dx, \quad (\lambda \geqq 1),$$

ist, erhält man nach $2k$ Schritten

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)\,2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}} - (2k)!\int_n^\infty \frac{P_{2k+1}(x)}{x^{2k+1}}\,dx.$$

Da hier das Restglied (bei festem k) absolut kleiner ist als eine feste Konstante dividiert durch n^{2k}, so können wir dem Ergebnis auch die Form

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)\,2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}} + \frac{A_n}{n^{2k}}}$$

geben, in der die A_n immer (d. h. für jedes feste k) eine beschränkte Zahlenfolge bilden. In jeder der beiden Formen pflegt man das Ergebnis als *Stirlingsche Formel*[1] zu bezeichnen.

6. Wählt man etwas allgemeiner $f(x) = \log(y + x)$ mit $y > 0$, so liefert die Eulersche Formel zunächst für $k = 0$

$$\log y + \log(y+1) + \cdots + \log(y+n)$$

$$= (y+n)\log(y+n) - n - y\log y + \frac{1}{2}(\log(y+n) + \log y) + \int_0^n \frac{P_1(x)}{y+x}\,dx.$$

Hieraus kann man folgendermaßen einen entsprechenden Ausdruck für die Γ-Funktion herleiten (vgl. S. 398 und 455): Man subtrahiere diese Gleichung von der Gleichung (**) des letzten Beispiels und addiere beiderseits $\log n^y$. So erhält man

$$\log\frac{n!\,n^y}{y(y+1)\cdots(y+n)} = \left(y - \frac{1}{2}\right)\log y - \left(y + n + \frac{1}{2}\right)\log\frac{y+n}{n}$$

$$+ \log\sqrt{2\pi} - \int_0^n \frac{P_1(x)}{y+x}\,dx - \int_n^\infty \frac{P_1(x)}{x}\,dx.$$

Für $n \to +\infty$ liefert dies

$$\log\Gamma(y) = \left(y - \frac{1}{2}\right)\log y - y + \log\sqrt{2\pi} - \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{y+x}\,dx.$$

---

[1] Stirling, J.: Methodus differentialis, S. 135. London 1730. Die Tatsache, daß die Konstante $\gamma = \log\sqrt{2\pi}$ ist, wurde indessen erst später gefunden.

Wird hier $2k$-mal partiell integriert (oder die EULERsche Formel sogleich für ein beliebiges k angesetzt), so erhält man hieraus die verallgemeinerte STIRLINGsche Formel[1]

$$\log \Gamma(y) = \left(y - \frac{1}{2}\right) \log y - y + \log \sqrt{2\pi}$$
$$+ \frac{B_2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{y} + \frac{B_4}{3 \cdot 4} \frac{1}{y^3} + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)} \cdot \frac{1}{y^{2k-1}}$$
$$- (2k)! \int_0^\infty \frac{P_{2k+1}(x)}{(y+x)^{2k+1}} dx.$$

7. Es sei jetzt $f(x) = \frac{1}{(1+x)^s}$ mit $x > 0$ und beliebigem s. Da wir die Fälle $s = 1, -1, -2, \ldots$ schon behandelt haben und der Fall $s = 0$ trivial ist, dürfen wir s von diesen Werten verschieden voraussetzen. Ersetzt man in der EULERschen Formel wieder n durch $(n-1)$, so liefert sie

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s}$$
$$= \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^s} + 1\right) + \frac{B_2}{2}\binom{s}{1}\left(1 - \frac{1}{n^{s+1}}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{B_{2k}}{2k}\binom{s+2k-2}{2k-1}\left(1 - \frac{1}{n^{s+2k-1}}\right) - (2k+1)!\binom{s+2k}{2k+1}\int_1^n \frac{P_{2k+1}(x)}{x^{s+2k+1}} dx.$$

Ist $s > 1$, so kann man hierin $n \to +\infty$ rücken lassen und erhält dann den folgenden bemerkenswerten Ausdruck für die RIEMANNsche ζ-Funktion (vgl. S. 356, 459/62 und 509):

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2}\binom{s}{1} + \cdots + \frac{B_{2k}}{2k}\binom{s+2k-2}{2k-1}$$
$$- (2k+1)!\binom{s+2k}{2k+1}\int_1^\infty \frac{P_{2k+1}(x)}{x^{s+2k+1}} dx.$$

Da hier die rechte Seite für $s \neq 1$, $s > -2k$ einen Sinn hat und da man sich für k jeden beliebigen positiven, ganzzahligen Wert genommen denken kann, so folgt hieraus unmittelbar — die Einzelheiten des Beweises gehören der Funktionentheorie an —, daß

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

eine ganze transzendente Funktion ist (vgl. S. 509, Fußnote 2). Über-

[1] STIRLING gibt l. c. die Formel für die Summe

$$\log x + \log(x+a) + \log(x+2a) + \cdots + \log(x+na).$$

dies liefert uns der erhaltene Ausdruck

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

und für $s = -p$ (p positiv, ganz), falls man sich $2k > p$ denkt,

$$\zeta(-p) = -\frac{1}{p+1} - B_1 + \frac{B_2}{2}\binom{-p}{1} + \frac{B_4}{4}\binom{-p+2}{3} + \cdots$$

Die Reihe bricht hier von selbst ab, und man kann schreiben

$$\zeta(-p) = -\frac{1}{p+1}\left\{1 + \binom{p+1}{1}B_1 + \binom{p+1}{2}B_2 + \binom{p+1}{3}B_3 + \cdots\right\}$$

$$= -\frac{1}{p+1}(1+B)^{p+1} = -\frac{B_{p+1}}{p+1}.$$

Die letzte Gleichheit folgt hierbei aus $(1+B)^{p+1} - B^{p+1} = 0$ (s. **106**).

C. Restabschätzungen.

Die Abschätzung des Restes in der Eulerschen Formel, die für praktische Zwecke besonders wichtig ist, wurde bisher noch vermieden. Doch drängt sich nun die Frage auf, ob man nicht allgemeine Aussagen über die Größe dieses Restes zu machen vermag. Wir werden sehen, daß dies möglich ist; und zwar wird sich zeigen lassen, daß in sehr allgemeinen Fällen *der Rest dasselbe Vorzeichen hat, aber seinem Betrage nach kleiner ist als das erste vernachlässigte Glied*, d. h. als dasjenige Glied, das in der Summenformel auftreten würde, wenn man dort k durch $k+1$ ersetzt. Dies wird u. a. immer dann eintreten, *wenn $f(x)$ für $x > 0$ ein festes Vorzeichen hat und wenn $f(x)$ und all seine Ableitungen für $x \to +\infty$ monoton gegen 0 streben.*

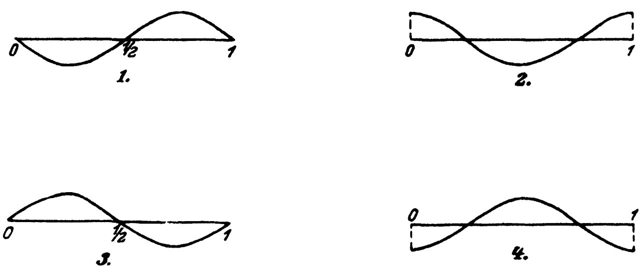

Fig. 14.

Um dies zu beweisen, müssen wir zunächst das Bild der Funktion $y = P_k(x)$, $(k \geqq 2)$, im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ genauer untersuchen. Wir werden zeigen, daß dies Bild den in den Fig. 14, 1, 2, 3, 4 dargestellten Typus hat, je nachdem k bei der Teilung durch 4 den Rest 1, 2, 3 oder 0 läßt.

Wir werden, schärfer gefaßt, zeigen, daß die Funktionen $P_k(x)$ mit ungerader Nummer drei Nullstellen erster Ordnung in 0, $\frac{1}{2}$, 1

haben, diejenigen mit gerader Nummer dagegen zwei Nullstellen erster Ordnung im Innern des Intervalls, und ferner, daß die Funktionen die aus den Figuren ersichtlichen Vorzeichen haben. Kurz also: die Funktionen $P_{2\lambda}(x)$ sind vom Typus der Kurven $(-1)^{\lambda-1}\cos 2\pi x$ und die Funktion $P_{2\lambda+1}(x)$ vom Typus der Kurven $(-1)^{\lambda-1}\sin 2\pi x$.

Diese Tatsachen kann man für die Nummern 2, 3 und 4 nach dem Muster der nachfolgenden Ausführungen direkt beweisen oder aus den expliziten Formeln von S. 541 ablesen. Wir dürfen daher annehmen, daß die Behauptungen bis zu $P_{2\lambda}(x)$ einschließlich ($\lambda \geqq 2$) schon bewiesen sind. Für $P_{2\lambda+1}(x)$ folgt dann aus **297** unmittelbar, daß es an den Stellen 0, $\frac{1}{2}$, 1 verschwindet und daß

$$P_{2\lambda+1}(1-x) = -P_{2\lambda+1}(x),$$

daß also $P_{2\lambda+1}$ symmetrisch ist in bezug auf den *Punkt* $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$. Hätte nun $P_{2\lambda+1}(x)$ noch eine weitere Nullstelle, so müßte es deren mindestens zwei, im ganzen also fünf haben. Dann hätte aber entgegen unserer Annahme $P_{2\lambda}(x)$ nach dem ROLLEschen Theorem (§ 19, Satz 8) mindestens vier Nullstellen. Das Vorzeichen von $P_{2\lambda+1}(x)$ in $0 < x < \frac{1}{2}$ ist nun das gleiche wie das von $P'_{2\lambda+1}(0) = P_{2\lambda}(0)$, d. h. das gleiche wie das von $B_{2\lambda}$, also das Zeichen $(-1)^{\lambda-1}$.

Da $P'_{2\lambda+2}(x) = P_{2\lambda+1}(x)$ ist, so hat $P_{2\lambda+2}(x)$ nur eine Extremstelle in $0 < x < 1$, nämlich in $x = \frac{1}{2}$. Der dortige Wert $P_{2\lambda+2}(\frac{1}{2})$ muß das entgegengesetzte Vorzeichen haben wie $P_{2\lambda+2}(0)$, da sonst $P_{2\lambda+2}(x)$ ein festes Vorzeichen in $0 \leqq x \leqq 1$ hätte und folglich

$$\int_0^1 P_{2\lambda+2}(x)\,dx = [P_{2\lambda+3}(x)]_0^1 \neq 0$$

wäre, was wegen der Periodizität der Funktionen gewiß nicht der Fall ist. Da schließlich $P_{2\lambda+2}(0)$ dasselbe Vorzeichen hat wie $B_{2\lambda+2}$, d. h. das Vorzeichen $(-1)^{\lambda}$, so sind alle Behauptungen bewiesen[1]. Wegen

$$P_{2\lambda}(1-x) = P_{2\lambda}(x)$$

ist übrigens $P_{2\lambda}(x)$ symmetrisch zur *Geraden* $x = \frac{1}{2}$.

Ist nun $h(x)$ eine für $x \geqq 0$ positive, monoton abnehmende Funktion, so hat

$$\int_p^{p+1} P_{2\lambda+1}(x)\,h(x)\,dx\,, \qquad (p \geqq 0,\ \text{ganz}),$$

offenbar dasselbe Vorzeichen wie $P_{2\lambda+1}(x)$ in $0 < x < \frac{1}{2}$, d. h. das Zeichen $(-1)^{\lambda-1}$. Denn wegen der Symmetrie des Bildes von $P_{2\lambda+1}(x)$ und wegen des monotonen Fallens von $h(x)$ ist

$$\left|\int_p^{p+\frac{1}{2}} P_{2\lambda+1}(x)\,h(x)\,dx\right| \geqq \left|\int_{p+\frac{1}{2}}^{p+1} P_{2\lambda+1}(x)\,h(x)\,dx\right|.$$

[1] Daß nur Nullstellen erster Ordnung in Betracht kommen, folgt sofort aus der Beziehung

$$P'_{k+1}(x) = P_k(x).$$

Also hat auch

$$\int_0^n P_{2\lambda+1}(x)\, h(x)\, dx$$

das Vorzeichen $(-1)^{\lambda-1}$, so daß insbesondre für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ diese Vorzeichen alternieren. Genau die umgekehrten Vorzeichen treten natürlich auf, wenn $h(x)$ stets negativ ist und monoton wächst.

Nimmt man nun an, daß die Funktion $f(x)$ für $x \geqq 0$ erklärt ist und daß sie selbst und alle ihre Ableitungen für $x \to +\infty$ monoton gegen 0 streben, so hat auch jede dieser Ableitungen ein festes Zeichen[1], und speziell haben $f^{(2k+1)}(x)$ und $f^{(2k+3)}(x)$ dasselbe Zeichen. Die Restglieder der Eulerschen Formel

$$R_k = \int_0^n P_{2k+1}(x)\, f^{(2k+1)}(x)\, dx$$

haben daher für $k = 1, 2, \ldots$ alternierende Vorzeichen. Daraus folgt aber, daß R_k und $(R_k - R_{k+1})$ dasselbe Vorzeichen haben, und weiter, daß

$$|R_k| \leqq |R_k - R_{k+1}|$$

ist. Nach der Eulerschen Formel ist nun

$$R_k = (f_0 + f_1 + \cdots + f_n) - \int_0^n f(x)\, dx - \cdots - \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f_n^{(2k-1)} - f_0^{(2k-1)}\right)$$

und also

$$R_k - R_{k+1} = \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!}\left(f_n^{(2k+1)} - f_0^{(2k+1)}\right).$$

Dies ist aber gerade „das erste vernachlässigte Glied", dessen Vorzeichen hiernach also mit demjenigen von R_k übereinstimmt, während sein absoluter Wert mindestens so groß ist wie der von R_k. Damit haben wir den

300. **Satz.** ***Ist die Funktion $f(x)$ für $x \geq 0$ erklärt und strebt sie ebenso wie alle ihre Ableitungen für $x \to +\infty$ monoton gegen 0, so läßt sich die Eulersche Formel in der einfacheren Form***

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_n = \int_0^n f(x)\, dx + \frac{1}{2}(f_n + f_0) + \frac{B_2}{2!}(f'_n - f'_0) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f_n^{(2k-1)} - f_0^{(2k-1)}\right) + \vartheta\, \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!}\left(f_n^{(2k+1)} - f_0^{(2k+1)}\right)$$

schreiben, in der $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ ist.

Die unendliche Reihe, von der hier rechter Hand die ersten Glieder auftreten und die im allgemeinen divergent ist, hat also tatsächlich die einleitend S. 537 erwähnte, charakteristische Eigenschaft der alternierenden Reihen, die für numerische Zwecke besonders bequem ist.

[1] Hierin soll auch der Fall mit eingeschlossen sein, daß eine dieser Ableitungen (von einer Stelle ab) ständig $= 0$ ist.

Bemerkungen und Beispiele.

1. Wie schon CAUCHY bemerkt, hat die geometrische Reihe

$$\frac{1}{c+t} = \frac{1}{c} - \frac{t}{c^2} + \frac{t^2}{c^3} - + \cdots, \qquad (c > 0,\ t > 0),$$

die eben erwähnte Eigenschaft der alternierenden Reihen nicht nur im Falle der Konvergenz, sondern für beliebige (positive) c und t. Denn schreibt man die Entwicklung mit Restglied, also in der Form

$$\frac{1}{c+t} = \frac{1}{c} - \frac{t}{c^2} + - \cdots + (-1)^n \frac{t^n}{c^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{c^{n+2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{c}},$$

so gilt sie in allen Fällen. Der links stehende Wert wird also für beliebige (positive) c und t durch die n^{te} Teilsumme der Reihe dargestellt bis auf einen Fehler, *der dasselbe Vorzeichen hat wie das erste vernachlässigte Glied, seinem Betrage nach aber kleiner ist.*

Benutzt man dies bei den Entwicklungen

$$\frac{2}{4\nu^2\pi^2 + t^2} = 2\left(\frac{1}{(2\nu\pi)^2} - \frac{t^2}{(2\nu\pi)^4} + \frac{t^4}{(2\nu\pi)^6} - + \cdots\right)$$

und addiert, so folgt, daß die Funktion

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{4\nu^2\pi^2 + t^2} = \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{t}$$

für jedes $t > 0$ auch durch den Ausdruck

$$\frac{B_2}{2!} + \frac{B_4}{4!} t^2 + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-2} + \vartheta \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} t^{2k}$$

dargestellt wird, bei dem über den Faktor ϑ allerdings nur bekannt ist, daß er zwischen 0 und 1 liegt.

Multipliziert man hier noch mit e^{-xt} und integriert über t von 0 bis $+\infty$, so folgt wegen

$$\int_0^\infty t^{2\lambda} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x^{2\lambda+1}} \int_0^\infty \tau^{2\lambda} e^{-\tau}\, d\tau = \frac{(2\lambda)!}{x^{2\lambda+1}},$$

daß

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-xt}}{t}\, dt = \frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\cdot\frac{1}{x^{2k-1}}$$
$$+ \vartheta_1 \frac{B_{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)}\cdot\frac{1}{x^{2k+1}}, \qquad 0 < \vartheta_1 < 1,$$

ist.

2. Nach B, 6 kann die Funktion

$$\log\Gamma(x) - \left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \log\sqrt{2\pi}\right\}$$

gleichfalls durch den Ausdruck dargestellt werden, den wir in 1. erhalten haben; denn das in B, 6 benutzte Restglied kann nach **300** in der eben erhaltenen Form geschrieben werden. Hieraus darf man aber ohne besondere Untersuchungen noch nicht schließen, daß

$$\log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \log \sqrt{2\pi} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \frac{e^{-xt}}{t}\, dt$$

ist (vgl. **301**, 4). Denn wir haben nur bewiesen, daß die Differenz beider Seiten der Gleichung für *große x sehr klein* ist, doch kann daraus noch nicht geschlossen werden, daß sie für *irgendeinen* Wert von x einander gleich sind. (Tatsächlich ist die hingeschriebene Gleichung aber richtig.)

3. Genau wie oben kann auch bei den Beispielen B, 4, 5, 6, 7 der Rest sehr einfach durch die Feststellung abgeschätzt werden, daß er dasselbe Vorzeichen hat wie das erste vernachlässigte Glied, seinem Betrage nach aber kleiner als dieses ist. Denn man erkennt unmittelbar, daß die bei diesen Beispielen benutzten Funktionen $f(x)$ die Voraussetzungen des Satzes **300** erfüllen.

§ 65. Asymptotische Reihen.

Wir kehren nun zu den einleitenden Bemerkungen von § 64, A zurück. Die Reihen, die man in den Beispielen B, 4—7 erhält, wenn man sie ohne Ende fortsetzt, sind divergent. Soweit es sich dabei um Potenzreihen in $\frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{n}$ handelt, kann man sogar genauer sagen, daß es beständig divergente Potenzreihen sind. Trotzdem können sie für numerische Zwecke nützlich sein, da die Untersuchung des Restes gezeigt hat, *daß er dasselbe Vorzeichen hat wie das erste vernachlässigte Glied, aber absolut genommen kleiner als dieses ist.* Diese Glieder nehmen aber zunächst ab und werden bei großen Werten der Veränderlichen sogar sehr klein; erst später wachsen sie wieder zu großen Werten an. Daher kann die Reihe trotz ihrer Divergenz für numerische Zwecke verwertet werden. Es ist dies zwar nur mit begrenzter, oft jedoch mit so großer Genauigkeit möglich, daß selbst den feinsten wissenschaftlichen Zwecken (etwa in der Astronomie) genügt wird[1]. Und dies ist um so eher der Fall, je größer die Variable ist; oder genauer: Wenn (wie in B, 5 und 6) die aus der EULERschen Formel gewonnene Entwicklung die Form

$$f(x) = g(x) + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

hat, so folgt daraus nicht nur für $x \to +\infty$ und jedes feste k die Beziehung

$$f(x) - \left(g(x) + a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_k}{x^k}\right) \to 0,$$

[1] EULER, der nirgends Restglieder betrachtet, sieht z. B. ohne weiteres die linke Seite von **298** als die Summe der divergenten Reihe an, die rechts auftritt. So schreibt er wegen **299**, 4 unbedenklich $C = \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \cdots$. Das ist indessen nicht statthaft, auch nicht von dem allgemeineren Standpunkt des § 59 aus; denn die Untersuchungen des § 64 haben kein Verfahren geliefert, das die in Rede stehende Summe aus den Teilsummen der Reihe durch einen *konvergenten* Grenzprozeß herzuleiten gestattete. Das war aber im XIII. Kapitel stets der Fall.

sondern sogar die Beziehung

$$x^k\left[f(x) - \left(g(x) + a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_k}{x^k}\right)\right] \to 0\,.$$

Eine allgemeine Untersuchung dieser Eigenschaft unsrer Entwicklung wurde fast gleichzeitig von TH. J. STIELTJES[1] und H. POINCARÉ[2] durchgeführt. Dem älteren Sprachgebrauch folgend nannte STIELTJES unsere Reihen *semi-konvergent*, eine Bezeichnung, die die Tatsache unterstreicht, daß die Reihen für numerische Zwecke sich fast so benehmen wie konvergente Reihen. POINCARÉ dagegen spricht von *asymptotischen* Reihen und stellt so ihre zuletzt genannte Eigenschaft, die exakt definiert werden kann, in den Vordergrund. Dieser POINCARÉschen Bezeichnung wollen wir uns weiterhin anschließen und präzisieren nun den Sachverhalt durch die folgende

Definition. *Eine Reihe der Form* $a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$, *die für keinen* **301.** *Wert von* x *zu konvergieren braucht, heißt eine asymptotische Darstellung oder Entwicklung der Funktion* $F(x)$, *die für alle hinreichend großen positiven* x *definiert sein soll, wenn für jedes feste* $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left[F(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right)\right] x^n \to 0$$

strebt für $x \to +\infty$. *Man schreibt dann symbolisch*

$$F(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

Bemerkungen und Beispiele.

1. Die Koeffizienten a_n sind hier keiner Beschränkung unterworfen, da die Reihe $\sum \frac{a_n}{x^n}$ nicht zu konvergieren braucht. Sie dürfen auch komplex sein, wenn $F(x)$ eine komplexe Funktion der reellen Veränderlichen x ist. Auch diese Variable darf komplex sein. Sie muß dann aber längs eines bestimmten Radius $\operatorname{arc} x =$ konst. gegen ∞ rücken; denn die asymptotische Entwicklung kann für jeden Radius eine andre sein. Im folgenden wollen wir diese Verallgemeinerungen beiseite lassen und betrachten weiterhin alle Größen als reell.

Andrerseits ist die Funktion $F(x)$ häufig nur für ganzzahlige Werte der Variablen definiert, wie etwa in den Fällen (vgl. § 64, B, 1 und 4)

$$1^p + 2^p + \cdots + x^p, \qquad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x}.$$

In solchen Fällen werden wir die Variablen meist mit $k, \nu, n, \ldots$ bezeichnen. $F(x)$ bedeutet dann einfach eine Zahlenfolge, deren Glieder als Funktionen ihres Index asymptotisch dargestellt sind.

---

[1] STIELTJES, TH. J.: Recherches sur quelques séries semi-convergentes. Annales de l'Éc. Norm. Sup. (3), Bd. 3, S. 201–258. 1886.

[2] POINCARÉ, H.: Sur les intégrales irregulières des équations linéaires. Acta mathematica Bd. 8, S. 295—344. 1886.

2. *Wenn* eine Reihe der Form $\sum \frac{a_n}{x^n}$ für $x > R$ tatsächlich konvergiert und die Funktion $F(x)$ darstellt, so ist die Reihe offenbar gleichzeitig eine asymptotische Darstellung von $F(x)$. So liefert uns jede konvergente Potenzreihe auch ein Beispiel für eine asymptotische Darstellung.

3. Die Frage, ob eine Funktion $F(x)$ eine asymptotische Darstellung besitzt und welche Werte dann die Koeffizienten haben, läßt sich theoretisch unmittelbar dadurch beantworten, daß für $x \to +\infty$

$$\begin{aligned} &F(x) \to a_0, \\ &(F(x) - a_0)\, x \to a_1, \\ &\left(F(x) - a_0 - \frac{a_1}{x}\right) x^2 \to a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

streben muß. Indessen wird die Entscheidung nur selten auf diesem Wege möglich sein; doch zeigt diese Betrachtung immerhin, daß eine gegebene Funktion *höchstens eine* asymptotische Entwicklung besitzen kann.

4. Andrerseits können *verschiedene* Funktionen sehr wohl ***ein und dieselbe*** asymptotische Entwicklung haben. Denn für $F(x) = e^{-x}$, $(x > 0)$, sind die in 3 betrachteten Grenzwerte sämtlich vorhanden und sämtlich $= 0$. Es ist also

$$e^{-x} \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \cdots$$

Ist also $F(x)$ irgendeine Funktion, die eine asymptotische Entwicklung besitzt, so haben z. B. die Funktionen

$$F(x) + e^{-x}, \quad F(x) + a e^{-bx}, \quad (b > 0), \; \ldots$$

genau dieselbe asymptotische Entwicklung. (Aus diesem Grunde durften wir in **300**, 2 nicht ohne weiteres schließen, daß die beiden dort betrachteten Funktionen identisch seien.)

5. In geometrischer Sprache kann man sagen, daß die Kurven

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} \quad \text{und} \quad y = F(x)$$

im Unendlichen eine Berührung von mindestens n^{ter} Ordnung eingehen

6. Für die Anwendung ist es vorteilhaft, auch die Schreibweise

$$F(x) \sim f(x) + g(x)\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right)$$

zu benutzen, in der $f(x)$ und $g(x)$ irgend zwei für alle hinreichend großen x definierte Funktionen bedeuten sollen, von denen die zweite dort niemals 0 ist. Diese Schreibweise soll dann lediglich besagen, daß

$$\frac{F(x) - f(x)}{g(x)} \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

ist. Einige der in § 64, B behandelten Beispiele können in diesem Sinne als die asymptotischen Entwicklungen der betreffenden Funktionen angesehen werden; denn wir dürfen jetzt schreiben:

a) $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \log n + C + \frac{1}{2n} - \frac{B_2}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{B_4}{4} \cdot \frac{1}{n^4} - \cdots;$

b) $\log n! \sim \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots$;

c) $\log(\Gamma(x)) \sim \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} + \frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^3} + \cdots$.

d) $1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} \sim \zeta(s) - \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{n^{s-1}}$

$$+\frac{1}{n^s}\left[\frac{1}{2} - \frac{B_2}{2}\cdot\binom{s}{1}\frac{1}{n} - \frac{B_4}{4}\cdot\binom{s+2}{3}\frac{1}{n^3} - \cdots\right].$$

Bei der letzten Formel muß $s \neq 1$ sein; für $s = 1$ handelt es sich um die unter a) gegebene Entwicklung.

Das Rechnen mit asymptotischen Reihen.

Mit asymptotischen Reihen läßt sich in mancher Hinsicht ebenso rechnen wie mit konvergenten Reihen. Ganz unmittelbar sieht man, daß, wenn die Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ je eine asymptotische Entwicklung besitzen, etwa

$$F(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

und

$$G(x) \sim b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots,$$

daß dann auch die Funktion $\alpha F(x) + \beta G(x)$ für beliebige Konstante α und β eine solche Entwicklung hat und daß

$$\alpha F(x) + \beta G(x) \sim \alpha a_0 + \beta b_0 + \frac{\alpha a_1 + \beta b_1}{x} + \frac{\alpha a_2 + \beta b_2}{x^2} + \cdots$$

ist. Fast ebenso leicht erkennt man, daß auch das Produkt $F(x)\,G(x)$ eine asymptotische Entwicklung besitzt und daß

$$F(x)\,G(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots$$

ist, wenn wie bei konvergenten Reihen

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = c_n$$

gesetzt wird. Nach Voraussetzung dürfen wir nämlich (bei festem n)

$$F(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n + \varepsilon}{x^n},$$

$$G(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{b_n + \eta}{x^n}$$

setzen, wenn mit $\varepsilon = \varepsilon(x)$ und $\eta = \eta(x)$ Funktionen bezeichnet werden, die für $x \to +\infty$ gegen 0 streben. Hieraus folgt dann, daß

$$\left[F(x)\cdot G(x) - \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n}\right)\right] x^n$$

$$= a_0\eta + b_0\varepsilon + \frac{a_1(b_n+\eta) + a_2 b_{n-1} + \cdots + (a_n+\varepsilon)b_1}{x} + \cdots + \frac{(a_n+\varepsilon)(b_n+\eta)}{x^n}$$

ist, was für $x \to +\infty$ offenbar gegen 0 strebt.

Durch wiederholte Anwendung dieser einfachen Ergebnisse folgt hieraus der

302. **Satz 1.** *Wenn jede der Funktionen* $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\ldots$, $F_p(x)$ *eine asymptotische Entwicklung besitzt und wenn* $g(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ *irgendein Polynom oder — wenn wir einen Teil des nachfolgenden Satzes vorweg nehmen — irgendeine rationale Funktion der Veränderlichen* $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *bedeutet, so besitzt auch die Funktion*

$$F(x) = g(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x))$$

eine asymptotische Entwicklung. Diese berechnet sich genau so, als ob alle Entwicklungen konvergent wären, wofern nur der Nenner der rationalen Funktion nicht verschwindet, wenn für $z_1, \ldots, z_p$ *die konstanten Glieder der asymptotischen Entwicklungen eingesetzt werden.*

Darüber hinaus gilt der folgende

Satz 2. *Ist* $g(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots$ *eine Potenzreihe mit dem positiven Radius* r *und besitzt* $F(x)$ *die asymptotische Entwicklung*

$$F(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots,$$

in der $|a_0| < r$ *ist, so besitzt auch die Funktion*

$$\Phi(x) = g(F(x))$$

(die wegen $F(x) \to a_0$ *für* $x \to +\infty$ *und wegen* $|a_0| < r$ *ersichtlich für alle hinreichend großen* x *definiert ist) eine asymptotische Entwicklung, und diese errechnet sich wieder genau so, als ob die Reihe* $\sum \frac{a_n}{x^n}$ *konvergent wäre.*

Beweis. Um die Entwicklungskoeffizienten von $\Phi(x)$ zu berechnen, setzt man $F(x) = a_0 + f$, $(f = f(x))$, und erhält — unter der alleinigen Voraussetzung, daß $|a_0| < r$ ist — zunächst

$$(*) \qquad g(F) = g(a_0 + f) = \beta_0 + \beta_1 f + \cdots + \beta_k f^k + \cdots,$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{1}{k!} g^{(k)}(a_0) = \beta_k, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

gesetzt wurde. Die Reihe (*) konvergiert, sobald $|f(x)| < r - |a_0|$ ist, was für alle hinreichend großen Werte von x wegen $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$ sicher der Fall ist, — mag $\sum \frac{a_n}{x^n}$ konvergieren oder nicht. Nach dem schon vollständig bewiesenen Teil des Satzes 1 folgen nun aus

$$f(x) \sim \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

sofort die Entwicklungen

$$(**) \qquad (f(x))^k \sim \frac{a_k^{(k)}}{x^k} + \frac{a_{k+1}^{(k)}}{x^{k+1}} + \cdots$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$. Hierbei haben die Koeffizienten $a_n^{(k)}$ wohlbestimmte, nach der Regel über die Produktbildung zweier asymptotischer Entwicklungen (also wie bei konvergenten Reihen) zu berechnende Werte. Diese Entwicklungen (**) müssen nun in (*) eingesetzt und der gewonnene Ausdruck formal (d. h. wieder so, als ob die Reihen (**) konvergent wären) nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ umgeordnet werden. Man erhält dann eine Entwicklung der Form

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots,$$

für die sich die Koeffizienten aus

$$A_0 = \beta_0, \quad A_1 = \beta_1 a_1, \quad A_2 = \beta_1 a_2 + \beta_2 a_2^{(2)}, \ldots,$$
$$A_n = \beta_1 a_n + \beta_2 a_n^{(2)} + \cdots + \beta_n a_n^{(n)}, \ldots$$

errechnen. Es bleibt zu zeigen, daß $\sum \frac{A_n}{x^n}$ die asymptotische Entwicklung von $\Phi(x)$ ist, d. h. daß der Ausdruck

$$\left[\Phi(x) - \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_n}{x^n}\right)\right] \cdot x^n$$

bei festem n für $x \to +\infty$ gegen 0 strebt.

Bezeichnet man nun mit $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x)$, ... gewisse Funktionen von x, die für $x \to +\infty$ gegen 0 streben, so folgt aus (*) und (**), daß

$$\Phi(x) = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_1}{x^n}\right) + \cdots + \beta_n\left(\frac{a_n^{(n)}}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n}\right)$$
$$+ f^{n+1} \cdot [\beta_{n+1} + \beta_{n+2} f + \cdots]$$

ist. Hiernach ist, da f^{n+1} in der Form $\frac{\varepsilon_{n+1}}{x^n}$ geschrieben werden kann,

$$\Phi(x) - \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n}\right) = \frac{1}{x^n}[\beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 + \cdots + \beta_n \varepsilon_n]$$
$$+ \frac{\varepsilon_{n+1}}{x^n}[\beta_{n+1} + \beta_{n+2} f + \cdots],$$

woraus die Behauptung abgelesen werden kann; denn der Ausdruck in der letzten eckigen Klammer strebt für $x \to +\infty$ gegen β_{n+1}, und die endlich vielen $\varepsilon_\nu(x)$ streben gegen 0.

Wählt man speziell $g(z) = \frac{1}{a_0 + z}$ und ersetzt $F(x)$ durch $F(x) - a_0$, so folgt aus diesem allgemeinen Ergebnis, wofern nur $a_0 \neq 0$ ist, daß

$$\frac{1}{F(x)} \sim \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2}\frac{1}{x} + \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3}\frac{1}{x^2} + \cdots$$

ist. Man „darf" also durch eine asymptotische Entwicklung auch dividieren wie durch eine konvergente Potenzreihe, wofern nur das konstante Glied $\neq 0$ ist. Damit ist auch der Beweis von Satz 1 vervollständigt.

Für $g(z) = e^z$ erhält man — und zwar ohne jede Einschränkung —

$$e^{F(x)} \sim e^{a_0}\left[1 + \frac{a_1}{x} + \frac{\frac{1}{2}a_1^2 + a_2}{x^2} + \cdots\right].$$

Insbesondere gilt nach **299**, 5

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840}\frac{1}{n^3} + \cdots\right].$$

Auch eine gliedweise Integration und Differentiation ist unter geeigneten Einschränkungen statthaft. Hierüber gilt der

Satz 3. *Ist* $F(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$ *und ist* $F(x)$ *stetig für* $x \geqq x_0$, *so gilt*

$$\Psi(x) = \int_x^\infty \left(F(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}\right) dt \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{n x^n} + \cdots$$

Hat $F(x)$ *eine stetige Ableitung* $F'(x)$ *und weiß man, daß diese überhaupt eine asymptotische Entwicklung besitzt, so ergibt sich diese durch gliedweise Differentiation, d. h. es ist*

$$F'(x) \sim -\frac{a_1}{x^2} - \frac{2a_2}{x^3} - \cdots - \frac{(n-1)a_{n-1}}{x^n} - \cdots$$

Beweis. Da $t^2\left(F(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}\right) \to a_2$ strebt für $t \to +\infty$, so existiert jedenfalls das die Funktion $\Psi(x)$ definierende Integral für $x \geqq x_0$. Nun darf weiter

$$F(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} - \cdots - \frac{a_{n+1}}{t^{n+1}} = \frac{\varepsilon(t)}{t^{n+1}}, \quad (n \geqq 1, \text{ fest}),$$

gesetzt werden mit $\varepsilon(t) \to 0$ für $t \to +\infty$. Hiernach ist

$$\Psi(x) - \frac{a_2}{x} - \cdots - \frac{a_{n+1}}{n x^n} = \int_x^\infty \frac{\varepsilon(t)}{t^{n+1}} dt.$$

Bezeichnet nun $\bar{\varepsilon}(x)$ das Maximum von $|\varepsilon(t)|$ in $x \leq t < +\infty$, so strebt mit wachsendem x auch $\bar{\varepsilon}(x) \to 0$; und da das letzte Integral $\leqq \frac{\bar{\varepsilon}(x)}{n x^n}$ ist, so strebt es auch noch nach Multiplikation mit x^n ebenfalls $\to 0$ für $x \to +\infty$.

Wenn nun die für $x \geqq x_0$ stetige Ableitung $F'(x)$ eine asymptotische Enwicklung

$$F'(x) \sim b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots$$

besitzt, so ist

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} F'(t)\,dt + C_1 = \int_{x_0}^{x} \left(b_0 + \frac{b_1}{t}\right) dt + \int_{x_0}^{x} \left(F'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t}\right) dt + C_1$$

$$= b_0 x + b_1 \log x + C_2 - \int_{x}^{\infty} \left(F'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t}\right) dt\,.$$

Hierbei bedeuten C_1 und C_2 gewisse Konstanten. Nach dem schon bewiesenen Teil des Satzes, und weil eine Funktion ihre asymptotische Entwicklung *eindeutig* bestimmt, folgt hieraus, daß $b_0 = b_1 = 0$ und daß für $n \geqq 2$ stets $b_n = -(n-1)a_{n-1}$ ist.

Die Entwicklung

$$F(x) = e^{-x} \sin(e^x) \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \cdots$$

zeigt, daß $F'(x)$ keine asymptotische Entwicklung zu haben braucht, selbst wenn $F(x)$ eine solche besitzt.

Die Sätze 1—3 bilden die Grundlage für POINCARÉs sehr fruchtbare Anwendungen der asymptotischen Reihen zur Lösung von Differentialgleichungen[1]. Ein ausführliches Eingehen auf diese Dinge verbietet der Raum; wir müssen uns damit begnügen, im nächsten Paragraphen ein Beispiel dieser Anwendungsart zu geben.

§ 66. Spezielle asymptotische Entwicklungen.

Die Einführung asymptotischer Entwicklungen legt zwei Fragen nahe: Erstlich die Frage, ob eine vorgelegte Funktion überhaupt eine solche Entwicklung besitzt und wie sie gegebenenfalls gefunden wird (*Entwicklungsproblem*); zweitens wie eine Funktion gefunden werden kann, die eine vorgelegte asymptotische Entwicklung besitzt (*Summierungsproblem*). Auf beide Fragen sind die Antworten, die nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft gegeben werden können, nicht sehr vollständig; denn obwohl sie recht zahlreich und teilweise von großer Allgemeinheit sind, stehen sie etwas vereinzelt da und entbehren des methodischen Zusammenhangs. Dieser Paragraph wird daher weniger eine befriedigende Lösung der beiden Probleme als vielmehr eine Anzahl typischer Beispiele solcher Lösungen bringen.

A. Beispiele zum Entwicklungsproblem.

1. Theoretisch wird die Frage der Entwicklung einer gegebenen **303.**
Funktion vollständig durch **301**, 3 erledigt. Indessen werden die erforderlichen Grenzwertbestimmungen nur selten alle durchgeführt werden

[1] Einen sehr klaren Bericht über den wichtigsten Inhalt der POINCARÉschen Arbeiten gibt E. BOREL in seinen „Leçons sur les séries divergentes" (s. **266**).

können. Auch versagt die Methode, wenn lim $F(x)$ für $x \to +\infty$ gar nicht existiert oder nicht endlich ist, wenn also nur eine asymptotische Entwicklung in dem allgemeineren Sinn von **301**, 6 in Betracht kommt. Erst wenn die dabei auftretenden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bekannt sind, kann nach **301**, 3 verfahren werden.

2. Die EULERsche Formel führte mehrfach zu asymptotischen Entwicklungen. Doch handelt es sich hier weniger um die Entwicklungen beliebig gegebener Funktionen als darum, daß bei günstiger Wahl der dortigen Funktion $f(x)$ sich wertvolle Entwicklungen ergaben.

3. Wir hatten schon betont, daß die vielleicht wichtigste Anwendung der asymptotischen Entwicklungen von POINCARÉ zur Auflösung von Differentialgleichungen gemacht wurde (s. S. 561, Fußnote 1). Der einfache Grundgedanke ist dieser: Wenn $y = F(x)$ der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

genügt, in der Φ eine rationale Funktion ihrer Argumente bedeutet, und wenn man weiß, daß $F(x)$ und seine n ersten Ableitungen je eine asymptotische Entwicklung besitzen, so folgen die Entwicklungen der Ableitungen $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ nach **302**, Satz 3 sämtlich aus derjenigen von $y = F(x)$, die etwa

$$y \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

lauten möge. Setzt man diese Entwicklung gemäß **302**, Satz 1 in die Differentialgleichung ein, so muß man die Entwicklung der Funktion 0 erhalten, d. h. alle Koeffizienten müssen einzeln verschwinden. Aus den so erhaltenen Gleichungen zusammen mit den Anfangsbedingungen lassen sich in vielen Fällen die Entwicklungskoeffizienten von $F(x)$ berechnen.

Es handle sich z. B. um die Funktion

$$y = F(x) = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} \, dt .$$

Sie ist für $x > 0$ definiert, hat die Ableitung

$$y' = F'(x) = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} \, dt - e^x \frac{e^{-x}}{x} = y - \frac{1}{x}$$

und genügt also für $x > 0$ der Differentialgleichung

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0 .$$

Man kann nun direkt beweisen — worauf indessen nicht näher eingegangen werden soll —, daß diese Gleichung nur *eine* Lösung y hat, die für $x > x_0 \geqq 0$ existiert und die zusammen mit ihrer ersten Ableitung eine asymptotische Entwicklung besitzt. Setzt man also

$$y \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots, \quad \text{so daß} \quad y' \sim -\frac{a_1}{x^2} - \frac{2a_2}{x^3} - \cdots,$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -a_1, \ldots, \quad a_{n+1} = -n a_n, \ldots,$$

aus denen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \cdots, \quad a_{n+1} = (-1)^n n!, \ldots$$

folgt. Daher ist

$$F(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + - \cdots$$

4. Die im vorigen Beispiel behandelte Funktion kann noch auf einem andern, häufig gangbaren Wege asymptotisch entwickelt werden. Setzt man $t = u + x$, so hat man

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u+x}\,du.$$

Nach der CAUCHYschen Bemerkung (s. **300**, 1) können wir hier für alle positiven x und u

$$\frac{1}{u+x} = \frac{1}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^3} - + \cdots + (-1)^n \frac{u^n}{x^{n+1}} + (-1)^{n+1} \vartheta \frac{u^{n+1}}{x^{n+2}},$$
$$(0 < \vartheta < 1),$$

setzen. Folglich ist

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} + (-1)^{n+1} \vartheta_1 \frac{(n+1)!}{x^{n+2}},$$
$$(0 < \vartheta_1 < 1),$$

so daß wir die im vorangehenden Beispiel gewonnene Entwicklung erneut erhalten haben[1].

5. Ist $f(u)$ eine für $u \geqq 0$ definierte und dort positive Funktion und existieren die Integrale

$$\int_0^\infty f(u)\, u^{n-1}\, du = (-1)^{n-1} a_n$$

---

[1] Die Funktion $e^{-x}F(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t}$, die durch die Transformation $e^{-t} = v$ in $-\int_0^y \frac{dv}{\log v}$ übergeht, ist vom Vorzeichen abgesehen der sogenannte *Integrallogarithmus* von $y = e^{-x}$.

für jedes $n \geqq 1$, so erhält man ganz ähnlich in

$$F(x) \sim \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots$$

die asymptotische Entwicklung für die Funktion

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{f(u)}{u+x}\,du,$$

und es folgt genauer, daß die Teilsummen der Reihe die Funktion $F(x)$ mit einem Fehler darstellen, der dasselbe Vorzeichen hat wie das erste vernachlässigte Glied, aber absolut genommen kleiner ist als dieses. Entwicklungen dieser Art sind besonders von TH. J. STIELTJES[1] untersucht worden. (Näheres s. u. in B, S. 567/68.)

6. Andere von den Hilfsmitteln der Funktionentheorie stärker Gebrauch machende Methoden gehen auf LAPLACE zurück, sind aber neuerdings von E. W. BARNES[2], H. BURKHARDT[3], O. PERRON[4] und G. FABER[5] ausgebaut worden. Wir können hierauf nicht näher eingehen, müssen uns vielmehr mit den folgenden Angaben begnügen: BARNES gibt die asymptotische Entwicklung vieler ganzer Funktionen, wie z. B. $\sum \frac{x^n}{n!\,(n+\vartheta)}$, $(\vartheta \neq 0, -1, -2, \ldots)$, und ähnlicher Funktionen. PERRON gibt außer den Beispielen, die wir schon kennen, die asymptotische Entwicklung gewisser Integrale, die in der Theorie der KEPLER-Bewegungen auftreten, wie

$$A(n) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{n(t-\varepsilon\sin t)i}}{1-\varepsilon\cos t}\,dt, \quad (0 < \varepsilon \leqq 1,\ n \text{ ganz}),$$

$$C(n) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{n(t-\sin t)i}\,dt.$$

Von unserm Standpunkt aus ist es bemerkenswert, daß in diesen Beispielen die Entwicklung nicht nach ganzzahligen, sondern nach gebrochenen Potenzen von $\frac{1}{n}$ fortschreitet. So hat die Entwicklung von $C(n)$ die Form

$$C(n) \sim \frac{c_1}{n^{1/3}} + \frac{c_2}{n^{5/3}} + \frac{c_3}{n^{7/3}} + \frac{c_4}{n^{11/3}} + \cdots$$

---

[1] STIELTJES, TH. J.: Recherches sur les fractions continues. Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse Bd. 8 und 9, 1894 und 1895.

[2] BARNES, E. W.: The Asymptotic Expansions of Integral Functions defined by Taylor's Series. Phil. Trans. Roy. Soc., A, 206, S. 249—297. 1906.

[3] BURKHARDT, H.: Über Funktionen großer Zahlen. Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss. 1914, S. 1—11.

[4] PERRON, O.: Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen. Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss. 1917, S. 191—219.

[5] FABER, G.: Abschätzung von Funktionen großer Zahlen. Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss. 1922, S. 285—304.

Dies legt eine weitere Ausdehnung der Definition **301**, 6 nahe, auf die wir indessen nicht eingehen wollen.

Viele weitere Beispiele von asymptotischen Entwicklungen dieser Art, besonders solche von trigonometrischen Integralen, die bei physikalischen und astronomischen Untersuchungen auftreten, findet man in dem Artikel von H. BURKHARDT: „Über trigonometrische Reihen und Integrale" in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, 1, S. 815—1354.

7. Eine Entwicklung, die zuerst von L. FEJÉR[1] angegeben und später von O. PERRON[2] eingehender studiert wurde, ist von speziellerer Natur. Es handelt sich bei ihr um eine asymptotische Darstellung der Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung der Funktion $e^{\alpha\frac{x}{1-x}}$ und allgemeiner der Funktion $e^{\frac{\alpha}{(1-x)^\varrho}}$ mit $\varrho > 0$ und $\alpha > 0$. Man hat zunächst die Potenzreihenentwicklung

$$e^{\alpha\frac{x}{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\alpha\frac{x}{1-x}\right)^k = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

bei der die Koeffizienten c_n die Werte

$$c_n = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n-1}{\nu-1}\frac{\alpha^\nu}{\nu!}$$

haben. Für diese zeigte nun PERRON in einer späteren Arbeit[3], daß sie eine asymptotische Entwicklung der Form

$$c_n \sim \frac{\sqrt[4]{\alpha}\, e^{2\sqrt{\alpha n}}}{2\sqrt{\pi}\, e^{\alpha}\sqrt[4]{n^3}}\left(1 + \frac{a_1}{\sqrt{n}} + \frac{a_2}{\sqrt{n^2}} + \frac{a_3}{\sqrt{n^3}} + \cdots\right)$$

besitzen[4].

8. Endlich sei noch erwähnt, daß die asymptotische Darstellung gewisser Funktionen den Gegenstand vieler tiefgehender Untersuchungen der analytischen Zahlentheorie bildet. Schon die Beispiele **301**, 6 a, b

---

[1] FEJÉR, L., in einer ungarisch geschriebenen Arbeit des Jahres 1909.

[2] PERRON, O.: Über das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe. Arch. d. Math. u. Phys. (3), Bd. 22, S. 329—340. 1914.

[3] PERRON, O.: Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters. J. reine u. angew. Math. Bd. 151, S. 63—78. 1921.

[4] Ein elementarer Beweis der sehr viel weniger aussagenden asymptotischen Beziehung

$$\log c_n \sim 2\sqrt{\alpha n}$$

wurde vom Verfasser und I. SCHUR gegeben: Elementarer Beweis einiger asymptotischer Formeln der additiven Zahlentheorie. Math. Zeitschr. Bd. 24, S. 559—574. 1925.

und d gehören hierher, da die entwickelten Funktionen zunächst nur für ganzzahlige Werte der Veränderlichen einen Sinn haben, es sich also um zahlentheoretische Funktionen handelt. Nur um die Natur derartiger Entwicklungen anzugeben, seien hier ohne Beweis noch einige Beispiele dafür angeführt:

a) Wenn $\tau(n)$ die *Anzahl der Teiler von n* bedeutet, ist

$$\frac{\tau(1)+\tau(2)+\cdots+\tau(n)}{n} \sim \log n + (2C-1) + \cdots,$$

wobei C die EULERsche Konstante bedeutet[1]. Bezüglich des nächsten Gliedes[2] ist im wesentlichen nur bekannt, daß es von kleinerer Ordnung ist als $n^{-\frac{2}{3}}$, aber von nicht kleinerer als $n^{-\frac{3}{4}}$.

b) Wenn $\sigma(n)$ die *Summe der Teiler von n* bedeutet, ist

$$\frac{\sigma(1)+\sigma(2)+\cdots+\sigma(n)}{n} \sim \frac{\pi^2}{12}n + \cdots$$

c) Wenn $\varphi(n)$ die *Anzahl der unterhalb n gelegenen und zu n teilerfremden natürlichen Zahlen* bedeutet, ist

$$\frac{\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)}{n} \sim \frac{3}{\pi^2}n + \cdots$$

d) Wenn $\pi(n)$ die *Anzahl der Primzahlen* $\leqq n$ bedeutet, ist

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n} + \cdots$$

In all diesen und vielen ähnlichen Fällen ist nicht einmal bekannt, ob überhaupt eine asymptotische Entwicklung existiert. Daher bedeuten die hingeschriebenen Beziehungen lediglich, daß die Differenz zwischen der rechten und der linken Seite bezüglich n von kleinerer Größenordnung ist als das letzte rechter Hand hingeschriebene Glied.

e) Wenn $p(n)$ die *Anzahl der verschiedenen Zerfällungen von n* in eine Summe von (gleichen oder ungleichen) natürlichen Zahlen bedeutet[3], so ist

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{6n}} + \cdots$$

In diesem besonders schwierigen Falle gelang es G. H. HARDY und S. RAMANUJAN[4] durch sehr tief liegende Untersuchungen die Entwicklung bis zu einem Gliede der Größenordnung $\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ fortzusetzen.

---

[1] LEJEUNE-DIRICHLET, P. G.: Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie. Werke Bd. 2, S. 49—66. 1849.

[2] HARDY, G. H.: On Dirichlet's Divisor Problem. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 15, S. 1—15. 1915.

[3] Es ist z. B. $p(4) = 5$, da 4 die fünf Zerfällungen 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$ und $1+1+1+1$ zuläßt.

[4] HARDY, G. H. und S. RAMANUJAN: Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis. Proc. Lond. Math. Soc. (2), Bd. 17, S. 75—115. 1917. Vgl. hierzu: RADEMACHER, H.: A convergent series for the partition function. Proc. nat. Acad. Sci. USA, Bd. 23, S. 78—84. 1937.

B. Beispiele für das Summierungsproblem.

Hier handelt es sich um die umgekehrte Frage, nämlich eine Funktion $F(x)$ zu finden, deren asymptotische Entwicklung **304.**

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

als beständig divergente Potenzreihe gegeben ist[1]. Die Antworten auf diese Frage sind noch vereinzelter und weniger allgemein als die des vorigen Abschnitts.

Hat man eine Funktion $F(x)$ der verlangten Art gefunden, so kann sie mit gewissem Rechte im Sinn von § 59 als „Summe" der divergenten Reihe $\sum \frac{a_n}{x^n}$ angesehen werden, da sie zu den Teilsummen der Reihe mit wachsendem Index in immer engere Beziehung tritt. Doch ist dies nur in eingeschränktem Maße richtig, da ja die Funktion gar nicht eindeutig durch die Reihe definiert wird. Inwieweit also $F(x)$ wirklich den Charakter einer „Summe" der divergenten Reihe hat, kann in jedem Einzelfall nur *a posteriori* festgestellt werden.

1. Den wichtigsten Fortschritt verdankt unser Problem den Untersuchungen von STIELTJES[2]. Wir sahen in A, 5, daß unter gewissen Voraussetzungen eine Funktion $F(x)$, die in der Form

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{f(u)}{x+u}\,du$$

vorgelegt ist, eine asymptotische Entwicklung $\sum \frac{a_n}{x^n}$ besitzt, in der

$$(*) \qquad (-1)^{n-1} a_n = \int_0^\infty f(u)\, u^{n-1}\, du, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

ist. Wird umgekehrt eine Entwicklung $\sum \frac{a_n}{x^n}$ mit ganz willkürlichen Koeffizienten a_n vorgelegt und läßt sich eine positive in $u > 0$ definierte Funktion $f(u)$ angeben, für die das Integral in (*) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ der Reihe nach die gegebenen Werte $a_1, -a_2, a_3, \ldots$ hat, so wird die Funktion

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{f(u)}{x+u}\,du$$

nach A, 5 eine Lösung des vorgelegten Summierungsproblems sein. Das sich hier einstellende neue Problem, bei gegebenen a_n eine Funktion $f(u)$

---

[1] Falls die Potenzreihe konvergiert, ist die gesuchte Funktion durch die Reihe selbst definiert.

[2] L. c. (S. 555, Fußn. 1 und S. 564, Fußn. 1) sowie in seiner Arbeit: Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable. Annales de la Fac. Scienc. Toulouse Bd. 3, H. 1—17. 1889.

zu finden, die die Gleichungen (*) erfüllt, wird jetzt das *Stieltjessche Momentenproblem* genannt. Stieltjes gibt unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die notwendige und hinreichende Bedingung für seine Lösbarkeit und insbesondere für die Existenz genau einer Lösung. Wenn $f(u)$ und folglich $F(x)$ durch das Momentenproblem eindeutig bestimmt ist — in diesem Fall wird die Reihe $\sum \frac{a_n}{x^n}$ kurz eine *Stieltjessche Reihe* genannt —, ist man schon eher berechtigt, diese Funktion $F(x)$ als Summe, etwa als *S-Summe*, der divergenten Reihe $\sum \frac{a_n}{x^n}$ anzusehen.

Der Raum verbietet uns, näher auf diese sehr ausgedehnten Untersuchungen einzugehen. Einen alles Wesentliche enthaltenden Bericht darüber gibt E. Borel in seinen schon mehrfach erwähnten „Leçons sur les séries divergentes". Als Beispiel sei etwa die Reihe

$$(\dagger) \qquad \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + - \cdots$$

vorgelegt. Das Momentenproblem lautet hier

$$\int_0^\infty f(u)\, u^{n-1}\, du = (n-1)!\,, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Es hat ersichtlich die Lösung $f(u) = e^{-u}$. Da man in diesem Falle unschwer beweisen kann, daß dies die einzige Lösung ist, so haben wir in

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{x+u}\, du$$

nicht nur eine Funktion $F(x)$ ermittelt, die die gegebene Reihe zur asymptotischen Entwicklung besitzt, sondern wir können auch $F(x)$ im Sinne des § 59 als S-Summe der beständig divergenten Potenzreihe (†) betrachten[1].

2. Die Theorie der Differentialgleichungen kann beim Summierungsproblem ebenso gute Dienste leisten wie beim Entwicklungsproblem (s. A, 3); denn man kann häufig eine Differentialgleichung angeben, die formal durch die vorgelegte Reihe befriedigt wird, und unter ihren Lösungen *kann* dann eine solche vorkommen, deren asymptotische

---

[1] So erhält man für $x = 1$ den Wert

$$s = \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{1+u} = 0{,}596'347 \ldots$$

als S-Summe der divergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!$ Diese Reihe wurde schon von Euler (der auch den gleichen Summenwert erhielt), Lacroix und Laguerre untersucht. Des letzteren Arbeiten bildeten den Ausgangspunkt der Stieltjesschen Untersuchungen.

Entwicklung durch die gegebene Reihe geliefert wird. Im allgemeinen aber liegen die Dinge nicht so und auch nicht wie in A, 3; sondern die Differentialgleichung ist das ursprüngliche Problem, und nur wenn diese formal (wie in A, 3 ausgeführt) durch eine asymptotische Reihe befriedigt werden kann und *wenn* diese direkt summiert werden kann, ist zu hoffen, daß auf diese Weise eine Lösung der Differentialgleichung gewonnen wird. Andernfalls muß man versuchen, die Eigenschaften der Lösung aus der asymptotischen Entwicklung abzulesen. Die Untersuchungen POINCARÉs[1], die später von A. KNESER und J. HORN[2] weitergeführt wurden, beschäftigen sich mit diesem Problem, das im übrigen nicht mehr im Rahmen dieses Buches liegt.

3. Bei dem STIELTJESschen Verfahren wurden die Koeffizienten a_n aus der vorgelegten Reihe $\sum \frac{a_n}{x^n}$ sozusagen ausgemerzt, indem die a_n durch

$$\int_0^\infty (-1)^{n-1} f(u)\, u^{n-1}\, du$$

und folglich die Reihe durch das Integral

$$\int_0^\infty f(u) \left(\frac{1}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^3} - + \cdots\right) du$$

ersetzt wurde, in dem nunmehr die sehr einfache geometrische Reihe — allerdings mit dem Faktor $f(u)$ behaftet — auftritt. Zur Bestimmung von $f(u)$ ist nun freilich die Lösung des Momentenproblems erforderlich, die im allgemeinen nicht leicht ist. Indessen kann man dies Verfahren dadurch elastischer machen, daß man

$$\sum \frac{a_n}{x^n} = \sum c_n \left(\frac{a_n}{c_n}\right) \frac{1}{x^n}$$

setzt und hierin die Faktoren c_n so wählt, daß einerseits das Momentenproblem

$$c_n = \int_0^\infty f(u)\, u^n\, du$$

gelöst werden kann und daß andrerseits die Potenzreihe

$$\sum \frac{a_n}{c_n} \left(\frac{u}{x}\right)^n$$

eine bekannte Funktion darstellt. So erhält man z. B. Verbindung mit dem BORELschen Summierungsverfahren, wenn man $c_n = n!$ und folglich $f(u) = e^{-u}$ setzt. Wenn dann

$$\sum \frac{a_n}{c_n} \left(\frac{u}{x}\right)^n = \sum \frac{a_n}{n!} \left(\frac{u}{x}\right)^n = \Phi\left(\frac{u}{x}\right)$$

[1] POINCARÉ: l. c. S. 555, Fußnote 2.

[2] Einen ausführlichen Bericht hierüber gibt J. HORN: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2. Aufl. Leipzig 1927.

als eine bekannte Funktion angesehen werden kann, so ist

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-u}\,\Phi\left(\frac{u}{x}\right) du$$

eine Lösung des vorgelegten Summierungsproblems[1]. Wir können hier nicht genauer auf die Voraussetzungen eingehen, unter denen diese Methode zum Ziel führt. Wir schließen mit einigen Beispielen für ihre Durchführung, bei denen allerdings, da wir keine allgemeinen Sätze hergeleitet haben, die Frage unerledigt bleiben muß, ob die gewonnene Funktion nun wirklich durch die gegebene Reihe asymptotisch dargestellt wird; doch ist dies a posteriori leicht zu verifizieren.

a) Für die Reihe

$$\frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + - \cdots,$$

die wir schon in 1 betrachtet haben, ist

$$a_n = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad \text{also} \quad \Phi\left(\frac{u}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{u}{x}\right)$$

und folglich

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-u} \log\left(1 + \frac{u}{x}\right) du.$$

[1] Die Verbindung mit dem Borelschen Summierungsverfahren kann folgendermaßen hergestellt werden: Die Funktion

$$y = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!},$$

die in § 59, 7 zur Definition des B-Verfahrens eingeführt wurde, hat die Ableitung

$$y' = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!}.$$

Setzt man also wie oben $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n = \Phi(t)$, so ist $y' = e^{-x}\Phi'(x)$ und also

$$y = a_0 + \int_0^x e^{-t}\,\Phi'(t)\,dt.$$

Wenn daher die B-Summe von $\sum a_n$ existiert, so wird sie durch

$$s = a_0 + \int_0^\infty e^{-t}\,\Phi'(t)\,dt,$$

geliefert, — ein Ausdruck, der unter passenden Annahmen durch partielle Integration in das Integral $\int_0^\infty e^{-t}\,\Phi(t)\,dt$ übergeführt werden kann. Das entspricht aber genau dem oben für $F(1)$ hergeleiteten Werte.

Durch partielle Integration stellt man leicht fest, daß diese Funktion mit der in 1 angetroffenen identisch ist.

b) Wenn die asymptotische Reihe

$$1 - \frac{1}{2 \cdot x} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot x^2} - + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot x^n} + \cdots$$

vorgelegt ist, hat man $\Phi\left(\frac{u}{x}\right) = \left(1 + \frac{u}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$ und folglich

$$F(x) = \sqrt{x} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} du = 2 e^x \sqrt{x} \int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-t^2} dt.$$

Dies liefert noch die asymptotische Entwicklung

$$G(z) = \int_z^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} e^{-z^2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2 z^3} + \cdots\right)$$

für das sog. GAUSSsche Fehlerintegral, das in der Wahrscheinlichkeitsrechnung von besonderer Bedeutung ist.

c) Ist die etwas allgemeinere Reihe

$$1 - \alpha \cdot \frac{1}{z} + \alpha(\alpha+1) \frac{1}{z^2} - + \cdots + (-1)^n \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) \frac{1}{x^n} + \cdots$$

mit $\alpha > 0$ vorgelegt, so hat man $\Phi\left(\frac{u}{x}\right) = \left(1 + \frac{u}{x}\right)^{-\alpha}$ und folglich

$$F(x) = x^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(u+x)^\alpha} du = \frac{1}{\alpha} x^\alpha e^x \int_{x^\alpha}^\infty e^{-t^{\frac{1}{\alpha}}} t^{\frac{1}{\alpha}-2} dt.$$

d) Für die Reihe

$$\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - + \cdots$$

hat man $\Phi\left(\frac{u}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{x}\right)$ und folglich

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-u} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{x}\right) du = x \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{x^2 + u^2} du.$$

Betrachtet man diese Funktion als die S-Summe der gegebenen divergenten Reihe, so erhält man z. B. den Wert

$$s = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{1 + u^2} du = 0{,}6214\ldots$$

als Summe der Reihe

$$1 - 2! + 4! - 6! + - \cdots$$

Aufgaben zum XIV. Kapitel.

217. Wenn symbolisch

$$\frac{2}{e^x+1} = 1 + \frac{C_1}{1!}x + \frac{C_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{C_n}{n!}x^n + \cdots = e^{Cx}$$

gesetzt wird, hat man zunächst

$$C_n = \frac{(1+2B)^{n+1} - (2B)^{n+1}}{n+1} = -\frac{2(2^{n+1}-1)B_{n+1}}{n+1}$$

und

$$(C+1)^n + C^n = 0 \quad \text{für} \quad n \geq 1$$

und folglich

$$C_0 = 1, \quad C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{1}{4}, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = -\frac{1}{2}, \ \ldots$$

Mit Benutzung dieser Zahlen hat man (wieder symbolisch)

$$1^p - 2^p + 3^p - + \cdots + (-1)^n n^p = \frac{1}{2}\{(-1)^{n-1}(C+1+n)^p - C^p\}.$$

218. Man verallgemeinere das Ergebnis in Aufg. 217 und leite eine Formel für die Summe

$$f(1) - f(2) + f(3) - + \cdots + (-1)^{n-1} f(n)$$

her, in der $f(x)$ ein Polynom bedeutet.

219. Nach dem Muster von **296** und **298** leite man eine „Summenformel" her für

$$f_0 - f_1 + f_2 - + \cdots + (-1)^n f_n.$$

220. a) Nach dem Muster von **299**, 3 leite man durch Anwendung der EULERschen Summenformel die Potenzreihenentwicklung für $\frac{x}{\sin x}$ her.

b) In der EULERschen Summenformel setze man

$$f(x) = x \log x, \quad x^2 \log x, \quad x^\alpha \log x, \quad x(\log x)^2, \ \ldots$$

und untersuche die dadurch gewonnenen Beziehungen (vgl. hierzu Aufg. 224).

221. Die EULERsche Summenformel **298** kann natürlich ebenso gut zur numerischen Auswertung von bestimmten Integralen ausgenützt werden wie für diejenige von Reihen. Man zeige so, daß (vgl. hierzu Aufg. 223)

$$\int_0^4 \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,dt = 0{,}620\ldots$$

ist.

222. a) Die Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ ist

$$= 7{,}485470\ldots \quad \text{für} \quad n = 1000$$
$$= 14{,}392726\ldots \quad \text{für} \quad n = 1000000.$$

Man beweise dies 1. unter Benutzung des Wertes von C, 2. ohne die Kenntnis desselben vorauszusetzen.

b) Man zeige, daß $n!$

für $n = 10^5$ den Wert $10^{456\,573} \cdot 2{,}8242\ldots,$

für $n = 10^6$ den Wert $10^{5\,565\,708} \cdot 8{,}2639\ldots$

hat.

c) Man zeige, daß $\Gamma(x + \frac{1}{2})$

für $x = 10^3$ den Wert $10^{2566} \cdot 1{,}2723\ldots,$

für $x = 10^6$ den Wert $10^{5\,565\,705} \cdot 8{,}2639\ldots$

hat.

d) Ohne die Kenntnis von π^2 vorauszusetzen, soll die Summe

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{für} \quad n = 10^3$$

ausgewertet und deren Grenzwert für $n \to +\infty$ berechnet werden. (Man erhält $0{,}104\,16683\ldots$ bzw. $0{,}105\,16633\ldots$).

e) Unter Benutzung von d) zeige man, daß

$$\frac{\pi^2}{6} = 1{,}644\,93406\ldots$$

f) Man zeige, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1{,}202\,05690\ldots$$

und daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 2{,}612\,37\ldots$$

ist.

g) Man beweise, daß $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ für $n = 10^6$ den Wert

$$1998{,}540\,14\ldots$$

hat.

223. Nach dem Muster von § 66, B, 3d bestimme man für festes $p = 1, 2, \ldots$ die S-Summen der folgenden Reihen:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (pn)!,$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (pn + 1)!, \ldots,$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (pn + p - 1)!,$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} n!\, x^n.$

(Vgl. hierzu Aufg. 221.)

224. Man beweise die folgende von GLAISHER herrührende Beziehung

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n \cong A \cdot n^{\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{12}} e^{-\frac{1}{4} n^2}$$

in der A die Konstante

$$2^{\frac{1}{36}} \pi^{\frac{1}{6}} \exp\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4} C + \frac{1}{3} s_2 - \frac{1}{4} s_3 + - \cdots\right)\right] = 1{,}282\,427\,1\ldots$$

bedeutet, bei der wiederum C die EULERsche Konstante und s_k die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^k}$ sein soll. (Vgl. hierzu Aufg. 220, b.)

225. Für die Funktion

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

soll die asymptotische Entwicklung

$$F(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n} \equiv \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{8x^4} + - \cdots$$

hergeleitet und gezeigt werden, daß in ihr a_n für $n \geq 2$ den Wert $\frac{2^n - 1}{n} B_n$ hat.

Literatur.

(Einige grundlegende Abhandlungen, zusammenfassende Darstellungen und Lehrbücher.)

1. NEWTON, I.: De analysi per aequationes numero terminorum infinitas. London 1711 (verfaßt 1669).
2. WALLIS, JOHN: Treatise of algebra both historical and practical with some additional treatises. London 1685.
3. BERNOULLI, JAKOB: Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita, mit 4 Fortsetzungen. Basel 1689—1704.
4. EULER, L.: Introductio in analysin infinitorum. Lausanne 1748.
5. EULER, L.: Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi infinitorum ac doctrina serierum. Berlin 1755.
6. EULER, L.: Institutiones calculi integralis. Petersburg 1768/69.
7. GAUSS, C. F.: Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \text{etc.}$ Göttingen 1812.
8. CAUCHY, A. L.: Cours d'analyse de l'école polytechnique. I[re] Partie. Analyse algébrique. Paris 1821.
9. ABEL, N. H.: Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots$. J. f. d. reine u. angew. Math. Bd. 1, S. 311—339. 1826.
10. DU BOIS-REYMOND, P.: Eine neue Theorie der Konvergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern. J. f. d. reine u. angew. Math. Bd. 76, S. 61—91. 1873.
11. PRINGSHEIM, A.: Allgemeine Theorie der Divergenz und Konvergenz von Reihen mit positiven Gliedern. Math. Ann. Bd. 35, S. 297—394. 1890.
12. PRINGSHEIM, A.: Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. **1**, 1, 3. Leipzig 1899.
13. BOREL, E.: Leçons sur les séries à termes positifs. Paris 1902.
14. RUNGE, C.: Theorie und Praxis der Reihen. Leipzig 1904.
15. STOLZ, O. und A. GMEINER: Einleitung in die Funktionentheorie. Leipzig 1905.
16. PRINGSHEIM, A. und J. MOLK: Algorithmes illimités de nombres réels. Encyclopédie des Sciences Mathématiques Bd. I, **1**, 4. Leipzig 1907.
17. BROMWICH, T. J. I'A.: An introduction to the theory of infinite series. London 1908, 2. Aufl. 1926.
18. PRINGSHEIM, A. und G. FABER: Algebraische Analysis. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. II, C, 1. Leipzig 1909.
19. FABRY, E.: Théorie des séries à termes constants. Paris 1910.
20. PRINGSHEIM, A., G. FABER und J. MOLK: Analyse algébrique. Encyclopédie des Sciences Mathématiques Bd. II, **2**, 7. Leipzig 1911.
21. STOLZ, O. und A. GMEINER: Theoretische Arithmetik Bd. II, 2. Aufl. Leipzig 1915.
22. PRINGSHEIM, A.: Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre Bd. 1, Abt. 1, 2 und 3. Leipzig 1916 und 1921; 2. (unveränderte) Aufl. 1923.

Namen- und Sachverzeichnis.