

Ricorsione, iterazione ed autoteoria

Applicazioni alla successione di Fibonacci

2020 07 30

Indice

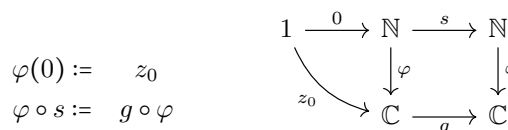
0.1	TIPI DI DEFINIZIONE	1
0.2	ESTENSIONI	2
0.3	FIBONACCI: SUCCESIONI	3
0.4	RICORSIONE k -LINEARE	5
0.5	FIBONACCI: AUTOTEORIA	8

Dove $i_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ è la mappa di inclusione. Due esempi sono le successioni $x_n := \ln(n + n^3)^{4n^2}$ e $\zeta_k = e^{2\frac{k}{n}}$.

Definizione iterativa

Si da adesso una definizione semplificata¹ di definizione per ricorsione.

Definizione 3. Data una funzione $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e un $z_0 \in \mathbb{C}$ si definisce la successione $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Essa viene detta **definita per iterazione** da g .



0.1 TIPI DI DEFINIZIONE

Definizione 1. Una funzione $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$ si dice **successione**. Denotata anche con $\varphi : n \mapsto \varphi_n$ oppure con $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. L'insieme di tutte le sequenze su X si denota con $X^{\mathbb{N}}$.

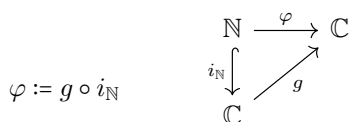
Esistono diversi modi per definire una *successione*: se $\mathbb{N} \subseteq X$ si può ad esempio utilizzare una funzione $g : X \rightarrow X$ già nota e considerare solo i valori che essa assume sui numeri naturali (definizione **analitica**) oppure specificare un modo per ottenere ogni valore della sequenza partendo dai valori precedenti usando g (definizione **ricorsiva**).

Chiaramente, vista la definizione di iterazione di funzioni, si ha che $\varphi(n) = g^{o n}(z_0)$.

Esempi: alcuni esempi fondamentali sono la definizione della funzione di addizione $\alpha_z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, di moltiplicazione $\mu_z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ e di esponenziazione $\varepsilon_z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$.

Definizione analitica

Definizione 2. Data una funzione $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si definisce la successione $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ come **definita analiticamente** da g (o **per restrizione ai naturali**). *i. e.*



φ	base	passo
α_z	$\alpha_z(0) = z$	$\alpha_z(n+1) = 1 + \alpha_z(n)$
μ_z	$\mu_z(0) = 0$	$\mu_z(n+1) = z + \mu_z(n)$
ε_z	$\varepsilon_z(0) = 1$	$\varepsilon_z(n+1) = z \cdot \varepsilon_z(n)$

Chiaramente queste successioni coincidono con le restrizioni dell'operazione corrispondente $\alpha_z(n) = z + n$, $\mu_z(n) = z \cdot n$ e $\varepsilon_z(n) = \exp_z(n)$.

¹Per completezza si veda l'**operatore di ricorsione primitiva** e l'operatore μ di minimizzazione usati per caratterizzare le funzioni **primitive ricorsive** e in generale le funzioni **calcolabili**.

Definizione ricorsiva

Diamo adesso una definizione un po' più ampia.

Definizione 4. Data una funzione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e un $z_0 \in \mathbb{C}$ si definisce la successione $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Essa viene detta **definita per ricorsione primitiva**² da g .

$$\begin{aligned} \varphi(0) &:= z_0 \\ \varphi(s(n)) &:= g(n, \varphi(n)) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{0} & \mathbb{N} & \xrightarrow{s} & \mathbb{N} \\ & \searrow^{z_0} & \text{id} \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ & & \mathbb{N} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \end{array}$$

Esempio: il fattoriale $! : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ è definito in questo modo con $z_0 := 1$ e $f(n, x) = n \cdot x$.

Altri due esempi sono sommatoria e produttoria: data una successione $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ si definiscono le successioni $\Sigma a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ e $\Pi a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ricorsivamente ponendo rispettivamente

$$\Sigma a(0) := a_0 \quad \Pi a(0) := a_0$$

per il caso base e per il passo rispettivamente

$$\Sigma a(n+1) := a_n + \Sigma a(n) \quad \Pi a(n+1) := a_n \cdot \Pi a(n)$$

Si vede chiaramente che $\Sigma a(n) = \sum_{i=0}^n a_i$ e che il fattoriale non è altro che la produttoria per la sequenza di inclusione dei naturali nei complessi $! = \Pi i_{\mathbb{N}}$.

0.2 ESTENSIONI

Si noti che tutto questo può essere facilmente generalizzato nel caso di campi k qualsiasi, purchè di caratteristica zero (ogni campo di caratteristica zero è un'estensione dell'anello \mathbb{Z} e quindi include

²Questa è una versione ancora semplificata della ricorsione primitiva. Lo schema completo di ricorsione primitiva richiede come dati iniziali un funzione $b : X^d \rightarrow Y$ e una famiglia di funzioni $g_{\mathbf{x}} : \mathbb{N} \times Y \rightarrow Y$, con $\mathbf{x} \in X^d$.

Con questi dati l'operatore di ricorsione primitiva definisce una funzione $\varphi_{\mathbf{x}} : \mathbb{N} \rightarrow Y$: come base $\varphi_{\mathbf{x}}(0) := b(\mathbf{x})$ e come passo $\varphi_{\mathbf{x}}(n) := g_{\mathbf{x}}(n, \varphi_{\mathbf{x}}(n))$.

\mathbb{N}). Importante è anche notare che le definizioni analitica ed iterativa (e ricorsiva) di una successione costituiscono funzioni dall'insieme delle funzioni a variabile in k a quello delle successioni su k . La prima è banalmente la mappa di restrizione mentre le altre due sono ben definite per via del teorema di ricorsione.

$$\begin{array}{l} \text{restrizione}_{\mathbb{N}} \\ \text{iterazione}_{z_0} \\ \text{ricorsione}_{z_0} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{res} : k^k \rightarrow k^{\mathbb{N}} \\ \text{ite}_{z_0} : k^k \rightarrow k^{\mathbb{N}} \\ \text{rec}_{z_0} : k^{\mathbb{N} \times k} \rightarrow k^{\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

Due problemi difficili sono quelli di ottenere una presentazione ricorsiva di una successione definita analiticamente o di trovare una forma analitica di una successione definita ricorsivamente (o iterativamente):

1. **(analitico → iterativo)** data una successione $\text{res}[f] : \mathbb{N} \rightarrow k$ e una funzione $f : k \rightarrow k$ che la definisca analiticamente, il problema è quello di trovare una funzione $\Psi[f] : k \rightarrow k$ che presenti la successione $\text{res}[f]$ iterativamente

$$\text{ite}_{f(0)}[\Psi[f]] = \text{res}[f]$$

$$\begin{array}{ccc} k^k & \xrightarrow{\text{res}} & k^{\mathbb{N}} \\ \text{<val}_0, \Psi \text{>} \downarrow \text{ite}_- & & \nearrow \\ k \times k^k & & \end{array}$$

Questo problema è in genere il meno complesso dei due. La funzione $\chi = \Psi[f]$ è la soluzione dell'equazione

$$\text{res}[f] \circ s = \chi \circ \text{res}[f] \quad (*)$$

e poichè $\text{res}[f] := f \circ i_{\mathbb{N}}$ la restrizione di f non è sempre suriettiva (perchè³), potrebbe non esistere una inversa destra che ci dia una forma chiusa per χ partendo dalla (*). In altre parole la procedura Ψ potrebbe non essere sempre definita.

³Perchè f potrebbe non essere suriettiva e anche se lo fosse $f i_{\mathbb{N}}$ suriettiva implica che k inietta in \mathbb{N} ma molti campi interessanti non sono numerabili.

2. (**iterativo**→**analitico**) data una successione $\text{ite}_{z_0}[f] : \mathbb{N} \rightarrow k$ e una funzione $f : k \rightarrow k$ che la definisca iterativamente, il problema è quello di trovare una funzione $\Sigma[f] : k \rightarrow k$ che estenda $\text{ite}_{z_0}[f]$ ai numeri reali

$$\text{res}[\Sigma[f]] = \text{ite}_{z_0}[f]$$

$$\begin{array}{ccc} k^k & \xrightarrow{\text{res}} & k^{\mathbb{N}} \\ \uparrow \Sigma & \nearrow \text{ite}_{z_0} & \\ k^k & & \end{array}$$

Questo tipo di procedura Σ è ancora più problematica ed elusiva della precedente. Idealmente dovrebbe associare ad una endofunzione $f : k \rightarrow k$ su un campo k una funzione $\Sigma[f]$ che estende idealmente l'iterazione da \mathbb{N} agli scalari di k . Infatti, per $\psi = \Sigma[f]^4$, varrebbe

$$\psi(z) = f^z(\psi(0_k))$$

per tutti gli $z \in \mathbb{N}$ (si ricorda che essendo k a caratteristica zero si ha $k^\dagger \simeq \mathbb{Z}$, i. e. il campo contiene \mathbb{N})

0.3 FIBONACCI: SUCCESSIONI

Si introduce adesso una successione ricorsiva particolare e d'ora in poi si lavorerà, dove non specificato, in $k = \mathbb{R}$. La successione di Fibonacci $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ è definita come segue

$$F(0) := 0 \quad (\text{base } 1)$$

$$F(1) := 1 \quad (\text{base } 1)$$

$$F(n+1) := F(n) + F(n+1) \quad (\text{passo})$$

A prima vista sembra che la successione di Fibonacci non sia definita in nessuno dei modi defi-

⁴In alcuni ambiti questa viene chiamata **superfunzione** z_0 -**inizializzata** di f . Il problema è legato al calcolo della funzione di Abel di f , detto anche superlogaritmo perchè soddisfa l'equazione funzionale di Abel

$$\alpha(f(z)) = \alpha(z) + 1$$

niti precedentemente: la sua computazione ricorre a due valori precedenti (*courseof-value-recursion*). Le definizioni di "definizione ricorsiva" date all'inizio non sono esaustive. La successione di Fibonacci usuale è una funzione ricorsiva primitiva nel senso classico, definita come funzione $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ma noi consideriamo una versione ottenuta estendendo il codominio ad una successione di numeri reali: attraverso la composizione con inclusione $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ si ottiene una successione di Fibonacci sui reali.

La seconda difficoltà che si nota è che nella definizione data di "definizione per ricorsione" si hanno solo due equazioni (*base + passo*) mentre Fibonacci è definita con tre equazioni (*base + base + passo*). Per risolvere questa discrepanza bisogna passare ad una definizione vettoriale avvicinandoci di un passo alla definizione completa di **ricorsione primitiva**.

Osservazione chiave

Due equazioni formano un sistema (congiunzione logica), ovvero una coppia ordinata. Questa osservazione è alla base in algebra lineare del trattamento dei sistemi di equazioni (congiunzioni logiche di equazioni) come n -uple ordinate di equazioni (ovvero vettori di equazioni). Questa osservazione è inoltre cruciale per ricondurre la definizione anomala della successione di Fibonacci ad una definizione di tipo iterativo (ricorsiva semplice).

Fibonacci vettoriale

La successione di Fibonacci vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definita come segue

$$\mathbf{F}(0) := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}(n+1) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{F}(n)$$

Chiaramente questa è una successione **definita iterativamente** che usa come funzione per il passo l'operatore lineare $L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Questo ci permette di ottenere l'importantissima equazione

$$\mathbf{F}(n) = A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fattorizzazione di F

Quale è il collegamento tra questa successione di vettori e la successione di Fibonacci? Cosa c'è di utile nell'introdurre questa successione di vettori?

Il punto è che si vuole arrivare a definire una **fattorizzazione di F come composizione di operatori lineari** permettendo l'applicazione degli strumenti di autoteoria. Si dimostra infatti la seguente

Proposizione 1. *Siano F e \mathbf{F} la successioni di Fibonacci usuale e vettoriale, vale*

$$\mathbf{F}(n) = \begin{bmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{bmatrix}$$

Dimostrazione: le componenti del vettore $\mathbf{F}(0)$ coincidono per definizione con i casi base della definizione ricorsiva di Fibonacci. Procedendo per induzione su n , ipotizzando che

$$\mathbf{F}(n) = \begin{bmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{bmatrix}$$

si dimostra che

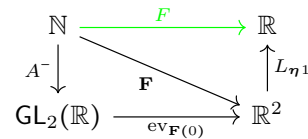
$$\mathbf{F}(n+1) := A\mathbf{F}(n) \quad (\text{def. Fib-vec})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{bmatrix} \quad (\text{ip. indutt.})$$

$$= \begin{bmatrix} F(n+1) \\ F(n) + F(n+1) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} F(n+1) \\ F(n+2) \end{bmatrix} \quad (\text{def. Fib.})$$

La successione di Fibonacci si fattorizza nella composizione di quella vettoriale tramite l'applicazione del funzionale lineare $\eta_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F(n) = \eta_1 \cdot \mathbf{F}(n) = \eta_1 A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Si è ridotta la definizione ricorsiva della successione di Fibonacci ad una definizione ricorsiva semplice, di tipo iterativo. Essendo in gioco l'iterazione di un operatore lineare si possono adesso applicare gli strumenti dell'autoteoria in tutta la loro potenza.

Cambio di base della ricorsione: successioni di Fibonacci

La definizione di F si poggia sulla matrice A e sulla scelta del vettore $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ come caso base. É chiaro che per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ possiamo definire una nuova successione ricorsiva leggermente diversa da F .

Si definisce la **famiglia di successioni di Fibonacci vettoriali** $\mathbf{F}_\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^\mathbb{N}$. In altre parole si definisce per ogni vettore

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

una successione di vettori $\mathbf{F}_{\mathbf{v}_0} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tali che

$$\mathbf{F}_{\mathbf{v}_0}(0) := \mathbf{v}_0 \quad (\text{base})$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{v}_0}(n+1) := A\mathbf{F}_{\mathbf{v}_0}(n) \quad (\text{passo})$$

con la matrice A definita precedentemente.

Ad ognuna di queste successioni di vettori si associa naturalmente una successione di numeri reali applicando il funzionale lineare η_1 : si ottiene così

□ una famiglia $\{F_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2}$ di varianti di F indicizzate

da \mathbb{R}^2

$$F_{\mathbf{v}} := \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{v}}$$

Tra queste si ottiene la classica successione di Fibonacci ponendo $\mathbf{v} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{1}]^\top$

$$F(n) = F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (n)$$

Tutte queste varianti soddisfano le equazioni $F_{\mathbf{v}}(0) = \alpha$, $F_{\mathbf{v}}(1) = \beta$ e $F_{\mathbf{v}}(n+2) = F_{\mathbf{v}}(n) + F_{\mathbf{v}}(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

0.4 RICORSIONE k -LINEARE

Una buona domanda è se sia possibile ricavare una matrice associata ad altre successioni ricorsive diverse da quelle di Fibonacci, o se sia possibile per altre successioni ricorsive ottenere una fattorizzazione simile in termini di operatori lineari. Per generalizzare la stessa tecnica applicata alla successioni di Fibonacci si può iniziare imitando la definizione usata per queste.

Un primo tentativo

Sia X un insieme (uno spazio), $\mathbf{x} \in X^d$ una d -upla ordinata e $g : X^d \rightarrow X$. Si definisce la successione $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$ nel modo seguente

$$\begin{aligned} \varphi(0) &:= x_0 \\ \varphi(1) &:= x_1 \\ &\vdots \\ \varphi(d-1) &:= x_{d-1} \\ \varphi(n+d) &:= g(\varphi(n), \varphi(n+1), \dots, \varphi(n+d-1)) \end{aligned}$$

L'obbiettivo è, anche in questo caso, quello di riuscire ad applicare i potenti strumenti dell'autoteoria per operare quel passaggio da definizione ricorsiva a definizione analitica di una successione nel caso più generale possibile. La definizione data così è però troppo astratta per i nostri obiettivi. Per proseguire è essenziale limitarsi al caso in cui X sia un k -spazio e $g : X^d \rightarrow X$ sia una applicazione k -lineare.

Definizione ricorsiva k -lineare di ordine d

Per semplicità consideriamo direttamente il caso specifico in cui $X = k$ sia un campo con caratteristica 0 (in modo che $\mathbb{N} \hookrightarrow k$).

Definizione 5. Sia k un campo, $\mathbf{v} \in k^d$ una d -upla ordinata e $\boldsymbol{\xi} : k^d \rightarrow k$ una combinazione lineare. Si definisce la successione $\varphi_{\mathbf{v}} : \mathbb{N} \rightarrow k$

$$\varphi_{\mathbf{v}}(0) := v_0$$

$$\varphi_{\mathbf{v}}(1) := v_1$$

⋮

$$\varphi_{\mathbf{v}}(d-1) := v_{d-1}$$

$$\varphi_{\mathbf{v}}(n+d) := \sum_{i=0}^{d-1} \xi_i \varphi_{\mathbf{v}}(n+i) \quad (\text{passo})$$

Questa successione verrà in questo testo battezzata **ricorsiva k -lineare di ordine d** definita dalla combinazione lineare $\boldsymbol{\xi}$.

Associata a questa successione se ne può definire un'altra vettoriale questa volta in modo **ricorsivo semplice** (o **iterativo**) esattamente come fatto per quella Fibonacci.

Definizione 6. Sia k un campo, $\mathbf{v} \in k^d$ una d -upla ordinata e $\boldsymbol{\xi} : k^d \rightarrow k$ una combinazione lineare. Si definisce la successione $\varphi_{\mathbf{v}} : \mathbb{N} \rightarrow k^d$

$$\varphi_{\mathbf{v}}(0) := \mathbf{v} \quad (\text{base})$$

$$\varphi_{\mathbf{v}}(n+1) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{d-1} \end{bmatrix} \varphi_{\mathbf{v}}(n) \quad (\text{passo})$$

Denoteremo la matrice sopra definita con $A_{\boldsymbol{\xi}}$.

Si può dimostrare che, come nel caso precedente, le due successioni $\varphi_{\mathbf{v}}$ e $\varphi_{\mathbf{v}}$ sono legate dall'equazione

$$\varphi_{\mathbf{v}} = L_{\boldsymbol{\eta}_1} \circ \varphi_{\mathbf{v}}$$

Dove $\boldsymbol{\eta}_i \in (k^d)^\wedge$ è il vettore riga tale che per i vettori della base canonica $\mathbf{e}_j \in k^d$ si ha $\boldsymbol{\eta}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Proposizione 2. Siano $\varphi_{\mathbf{v}}$ e $\underline{\varphi}_{\mathbf{v}}$ la successioni ricorsive k -lineare di ordine d , vale

$$\varphi_{\mathbf{v}}(n) = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{v}}(n) \\ \varphi_{\mathbf{v}}(n+1) \\ \vdots \\ \varphi_{\mathbf{v}}(n+d-1) \end{bmatrix}$$

Dimostrazione: si procede induttivamente. Per $n = 0$ le componenti del vettore $\underline{\varphi}_{\mathbf{v}}(0) := \mathbf{v}$ coincidono per definizione con i casi base della definizione ricorsiva: sia $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$

$$\eta_{i+1} \cdot \mathbf{v} = v_i = \varphi_{\mathbf{v}}(i)$$

Procedendo, si ipotizza che l'equazione valga per n e si dimostra che l'equazione vale per $n+1$. Per definizione si ha $\underline{\varphi}_{\mathbf{v}}(n+1) = A_{\xi} \underline{\varphi}_{\mathbf{v}}(n)$, applicando l'ipotesi induttiva si ha

$$\underline{\varphi}_{\mathbf{v}}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_{d-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{v}}(n) \\ \varphi_{\mathbf{v}}(n+1) \\ \vdots \\ \varphi_{\mathbf{v}}(n+d-1) \end{bmatrix}$$

Calcolando il prodotto righe per colonne e applicando la definizione di $\varphi_{\mathbf{v}}$ si dimostra il passo induttivo.

$$= \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{v}}(n+1) \\ \varphi_{\mathbf{v}}(n+2) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{d-1} \xi_i \varphi_{\mathbf{v}}(n+i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{v}}(n+1) \\ \varphi_{\mathbf{v}}(n+2) \\ \vdots \\ \varphi_{\mathbf{v}}(n+d) \end{bmatrix}$$

□

Estensione di una successione ricorsiva k -lineare

Corollario banale della definizione iterativa è che vale l'equazione

$$\boxed{\varphi_{\mathbf{v}}(n) = A_{\xi}^n \mathbf{v}}$$

A questo punto è evidente che se la matrice A_{ξ} è diagonalizzabile, ed esite come in $k = \mathbb{C}$ una funzione di esponenziale possiamo estendere la suc-

cessione da \mathbb{N} ad una funzione ad argomento in k .

Proposizione 3. Sia $\underline{\varphi}_{\mathbf{v}} : \mathbb{N} \rightarrow k^d$ una successione ricorsiva k -lineare e A_{ξ} la sua matrice associata. Se A_{ξ} è diagonalizzabile e $\boldsymbol{\lambda} \in k^d$ è il suo spettro⁵ allora per qualche $H \in \text{GL}_d(k)$ vale l'equazione

$$\underline{\varphi}_{\mathbf{v}}(n) = (H \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})^n H^{-1}) \mathbf{v}$$

Dimostrazione: essendo la matrice associata alla successione diagonalizzabile allora ha associata una base di autovettori. Da questa base si definisce una matrice invertibile H che rende la matrice A_{ξ} simile alla matrice che ha come diagonale il suo spettro. Essendo le due matrici coniugate (via H) si ha che $A_{\xi}^n = H \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})^n H^{-1}$. □

Corollario 1. Se la matrice associata A_{ξ} è diagonalizzabile, $\boldsymbol{\lambda} \in k^d$ è il suo spettro e $\mathbf{k} \in k^d$ sono le coordinate di \mathbf{v} nell'autobase $\mathbf{h}_i = H \mathbf{e}_i$ allora

$$\varphi_{\mathbf{v}}(n) = \sum_{i=1}^d k_i \lambda_i^n \mathbf{h}_i$$

e di conseguenza

$$\varphi_{\mathbf{v}}(n) = \sum_{i=1}^d k_i \lambda_i^n H_{1i}$$

Dimostrazione: chiaramente $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^d k_i \mathbf{h}_i = H \mathbf{k}$ dunque $A_{\xi}^n \mathbf{v} = H \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})^n \mathbf{k}$. La matrice H dell'autobase viene moltiplicata per un vettore che ha coordinate $\lambda_i^n k_i$ quindi si ha il corollario. Per la seconda equazione si noti che $\varphi_{\mathbf{v}}(n) := \boldsymbol{\eta}_1 \underline{\varphi}_{\mathbf{v}}(n)$ e che $\boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{h}_i = H_{1i}$. □

Corollario 2. Se \mathbf{v} è un autovettore di A_{ξ} con autovalore associato $\lambda \in k$ si ha la seguente forma chiusa

$$\underline{\varphi}_{\mathbf{v}}(n) = \lambda^n \mathbf{v}$$

e di conseguenza

$$\varphi_{\mathbf{v}}(n) = \lambda^n v_0$$

⁵Per essere precisi una permutazione qualsiasi del suo spettro, inteso come sequenza di scalari.

Nel caso di $k = \mathbb{R} (= \mathbb{C})$ si sarebbe tentati di sostituire n con un qualsiasi numero reale (o complesso) in modo da da ottenere una **estensione** $\hat{\varphi}_{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\hat{\varphi}_{\mathbf{v}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$) tale che

$$\boxed{\text{res}_{\mathbb{N}}[\hat{\varphi}_{\mathbf{v}}] = \varphi_{\mathbf{v}}}$$

Per fare questo bisogna superare due difficoltà:

1. la prima è che non in ogni campo è definita una esponenziazione come nei reali/complessi (una iterazione della moltiplicazione). Non è affatto evidente come estendere l'esponenziazione intera in un campo k generico;
2. la seconda è che il corollario rende evidente come estendere la successione solo per \mathbf{v} autovettori della matrice associata. Non è evidente affatto come estendere n nel caso di \mathbf{v} generici. Per ottenere una soluzione generale dovremmo essere in grado di elevare a potenza una matrice per uno scalare.

Potenza di vettori/matrici diagonali

La potenza con esponente intero positivo di una matrice diagonale ha la seguente proprietà.

$$\text{diag}(\boldsymbol{\lambda})^n = \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}^n)$$

Sopra con la potenza n -esima di un vettore si intende l'elevazione ad n componente per componente $(\mathbf{v}^n)_i := v_i^n$.

Se nel campo k esiste un modo di elevare uno scalare $b \in k$ ad un altro scalare $t \in k$, in modo da estendere l'elevamento di a potenza con esponente intero, si potrebbe definire sia l'elevamento di un vettore $\mathbf{b} \in k^d$ ad uno scalare $t \in k$ e conseguentemente l'elevamento di una matrice diagonale $D \in M_k(d)$ ad uno scalare t generico

$$\text{diag}(\mathbf{b})^t := \text{diag}(\mathbf{b}^t) = \text{diag}\left(\begin{bmatrix} b_1^t \\ b_2^t \\ \vdots \\ b_d^t \end{bmatrix}\right)$$

Alcuni esempi noti sono per $k = \mathbb{R}$ dove b^x è sempre definito per $0 < x$ e per $k = \mathbb{C}$ dove b^z è sempre definito per $b \neq 0$

Definizione 7. Sia $k = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ un vettore con componenti strettamente positive, si definisce il vettore \mathbf{b}^x

$$(\mathbf{b}^x)_i := b_i^x$$

Sia $k = \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^d$ un vettore con componenti non nulle, si definisce il vettore \mathbf{b}^z

$$(\mathbf{b}^z)_i := b_i^z$$

Dal momento che per le matrici diagonali vale $(D \cdot E)_{ij} = D_{ij}E_{ij}$ allora per l'elevamento a potenza delle matrici diagonali che abbiamo definito per $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ valgono le proprietà

$$\begin{aligned} D^{0k} &= I_d & D^{z+w} &= D^z \cdot D^w \\ D^{1k} &= D & D^{zw} &= (D^z)^w \\ I_d^z &= I_d & (D \cdot E)^z &= D^z \cdot E^z \end{aligned}$$

Si noti come stiamo implicitamente definendo una struttura di k -spazio sul gruppo abeliano delle matrici diagonali invertibili di ordine n , che denotiamo con $\Delta_n(k)^*$ (equivalentemente un morfismo di campi iniettivo

$$\varepsilon : k \hookrightarrow \text{End}_{\mathbf{Ab}}(\Delta_n(k)^*)$$

di k nell'anello degli endomorfismi del gruppo moltiplicativo delle matrici diagonali invertibili).

Tutto questo non è ancora sufficiente per risolvere le difficoltà sottolineate precedentemente. Per risolvere è necessario poter definire un modo di elevare ad uno scalare una qualsiasi matrice diagonalizzabile: l'obbiettivo è trovare un modo per calcolare esplicitamente A_{ξ}^z per $z \in \mathbb{C}$.

Potenze di matrici diagonalizzabili

Avendo già dato una definizione di D^z per matrici diagonali appartenenti una sottoclasse speciale⁶ di D diagonali, la generalizzazione ingenua che si potrebbe formulare è la seguente.

Sia A una matrice diagonalizzabile tale che la matrice diagonale D con cui A in rapporto di similitudine sia una matrice invertibile (dunque anche A è invertibile) e, nel caso di $k = \mathbb{R}$, abbia inoltre diagonale strettamente positiva. Si potrebbe quindi definire per tale A la sua potenza z -esima nel modo seguente

$$A^z := HD^zH^{-1}?$$

Ma è questa una buona definizione? Bisogna dimostrare che la definizione è indipendente dalla scelta della diagonalizzazione.

Ipotesi: siano infatti $A = HDH^{-1} = GEG^{-1}$ due diagonalizzazioni di A . È possibile dimostrare che per ogni z si ha

$$HD^zH^{-1} = GE^zG^{-1}?$$

0.5 FIBONACCI: AUTOTEORIA

Le successioni della famiglia di successioni di Fibonacci vettoriali sono k -lineari ricorsive di dimensione 2: risultano quindi dall'iterazione dell'operatore lineare associato (la matrice di ordine 2 associata) valutato nel caso base. Ci serve sapere se la matrice A associata alla famiglia in questione è diagonalizzabile.

Spettro e sezione aurea

Calcoliamone lo spettro: il suo polinomio caratteristico $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ è un polinomio con due soluzioni distinte in \mathbb{R} quindi A è diagonalizzabile.

⁶Nel caso di $k = \mathbb{R}$ deve anche avere la diagonale strettamente positiva mentre nel caso di $k = \mathbb{C}$ basta che $|D| \neq 0$, i.e. $D \in \text{GL}_d(k)$

Lo spettro di A è la coppia

$$\sigma(A) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Gli autovalori della matrice di Fibonacci sono ϕ , detta **sezione aurea**, e $-\Phi$, dove Φ è chiamato **coniugato della sezione aurea**. Questi due numeri sono dotati di parecchie simmetrie e sono legati da molte equazioni.

Le tre identità principali che si ricavano sono

$$\begin{aligned} \phi(-\Phi) = -1 &\implies \phi = \Phi^{-1} \\ \phi + (-\Phi) = 1 &\implies \phi = 1 + \Phi \\ \phi - (-\Phi) = \sqrt{5} &\implies \phi = \sqrt{5} - \Phi \end{aligned}$$

Da queste si derivano le due utili identità $\phi^2 = \phi(1 + \Phi) = 1 + \phi$ e $\Phi^2 = \Phi(\phi - 1) = 1 - \Phi$.

Autospazi e sottospazi Fibonacci-invarianti

Calcoliamo adesso i due autospazi associati

$$V_\phi : (A - \phi I_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$$

$$V_{-\Phi} : (A + \Phi I_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$$

Per ottenere gli spazi cerchiamo una presentazione parametrica dei seguenti spazi nulli

$$V_\phi = N\left(\begin{bmatrix} -\phi & 1 \\ 1 & 1 - \phi \end{bmatrix}\right) \quad V_{-\Phi} = N\left(\begin{bmatrix} \Phi & 1 \\ 1 & 1 + \Phi \end{bmatrix}\right)$$

- Per l'autovalore ϕ si semplifica con $1 - \phi = -\Phi$ e dopo la riduzione si ottiene

$$\begin{bmatrix} -\phi & 1 \\ 1 & -\Phi \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -\phi & 1 \\ 0 & -\Phi\phi + 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -\phi & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 ovvero lo spazio nullo è la retta di equazione $-\phi x + y = 0$.
- Mentre per l'autovalore $-\Phi$ si semplifica con $1 + \Phi = \phi$

$$\begin{bmatrix} \Phi & 1 \\ 1 & \phi \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \Phi & 1 \\ 0 & \phi(-\Phi) + 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \Phi & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 ottenendo la retta di equazione $\Phi x + y = 0$.

La presentazione parametrica è la seguente

$$V_\phi = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \end{bmatrix} \right\rangle \quad V_{-\Phi} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -\Phi \end{bmatrix} \right\rangle$$

Si noti che siccome $-\Phi = -\phi^{-1}$ la base è ortogonale (evidente facendo il prodotto scalare). Si può adesso formare un autobase per \mathbb{R}^2 per diagonalizzare A ed estendere tutte le successione di Fibonacci. Prima di proseguire è importante ricordare la seguente proposizione.

Proposizione 4. *Sia \mathbf{v} un vettore in \mathbb{R}^2 e $\mathbf{F}_\mathbf{v} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la successione di Fibonacci vettoriali con base in \mathbf{v} . Se \mathbf{v} è un autovettore che appartiene all'autospazio V_λ (con $\lambda \in \{\phi, -\Phi\}$) allora $\mathbf{F}_\mathbf{v}(n) = \lambda^n \mathbf{v}$.*

La dimostrazione è banale e segue direttamente versione generale data nel capitolo precedente.

Corollario 3. *Se $\mathbf{v} \in V_\phi$ allora $\mathbf{F}_\mathbf{v}$ diverge (dunque anche le componenti divergono). Se $\mathbf{v} \in V_{-\Phi}$ allora $\mathbf{F}_\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}$ (dunque le componenti convergono a 0 e $F_\mathbf{v}(n) \rightarrow 0$).*

Dimostrazione: nel primo caso $1 < \phi$ quindi la successione diverge; nel secondo caso $-1 < -\Phi < 0$ e quindi la successione delle componenti $F_\mathbf{v}(n)$ decresce fino a tendere a zero. \square

Diagonalizzazione

Ora che abbiamo ottenuto una base di autovettori possiamo esprimere A come coniugata della matrice diagonale formata dagli autovalori attraverso la matrice del cambiamento di base.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & -\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & -\Phi \end{bmatrix}^{-1}$$

Prova: per vedere che l'equazione è corretta basta applicare le identità notevoli di cui gode la sezione aurea e il suo coniugato.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & -\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & -\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\Phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi & -\Phi \\ 1 + \phi & 1 - \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & -\Phi \\ \phi^2 & \Phi^2 \end{bmatrix}$$

Si deve ora calcolare l'inversa della matrice di cambio base. La formula è $X^{-1} = \frac{1}{|X|}(X^{\text{ca}})^\top$ dove X^{ca} è la matrice dei complementi algebrici. Il determinante è $-\Phi - \phi = -\sqrt{5}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & -\Phi \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\Phi & -\phi \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{-\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\Phi & -1 \\ -\phi & 1 \end{bmatrix}$$

Prova: moltiplicando le due matrici si ottiene $-\sqrt{5}I_2$

$$\begin{bmatrix} -\Phi - \phi & -1 + 1 \\ -\phi\Phi + \Phi\phi & -\phi - \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Si denoti con H la matrice di cambio base e con D la matrice degli autovalori di A si ottiene adesso la seguente formula chiusa:

$$\begin{aligned} A^n &= (HDH^{-1})^n \\ &= HD^nH^{-1} \\ &= \frac{1}{-\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & -\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & (-\Phi)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Phi & -1 \\ -\phi & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\phi^{n-1} + (-\Phi)^{n-1} & -\phi^n + (-\Phi)^n \\ -\phi^n + (-\Phi)^n & -\phi^{n+1} + (-\Phi)^{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si ricordi ora che si ha l'identità $\mathbf{F}_\mathbf{v}(n) = A^n \mathbf{v}$, dove $\mathbf{F}_\mathbf{v}$ è la successione di Fibonacci vettoriale con base $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$ e che vale $F_\mathbf{v}(n) = \boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{F}_\mathbf{v}(n)$. L'espressione in forma chiusa per le successioni di Fibonacci è dunque la seguente:

$$\mathbf{F}_\mathbf{v}(n) = \frac{\begin{bmatrix} -\phi^{n-1} + (-\Phi)^{n-1} & -\phi^n + (-\Phi)^n \\ -\phi^n + (-\Phi)^n & -\phi^{n+1} + (-\Phi)^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}{-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} (\alpha + \beta\phi)\phi^{n-1} - (\alpha - \beta\Phi)(-\Phi)^{n-1} \\ (\alpha + \beta\phi)\phi^n - (\alpha - \beta\Phi)(-\Phi)^n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\sqrt{5}\mathbf{F}_\mathbf{v}(n) = (\alpha + \beta\phi)\phi^{n-1} - (\alpha - \beta\Phi)(-\Phi)^{n-1}}$$

Nel caso della successione classica si avrebbe perciò

$$F(n) = \frac{\phi^n - (-\Phi)^n}{\sqrt{5}}$$