ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПОСТРОЕНИЯ НОВОЙ ЧИСЛОВОЙ ОПЕРАЦИИ

С.А.Захаров

Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье предложена неассоциативная коммутативная числовая операция *: дано ее определениедля случаяN одинаковых вещественных операндов исформулированы основные требования к ней. С учетом этих требований построено обобщение этой операции на случайN неодинаковых вещественных операндов.Дляграфиков функций$y(x) = c * x, y(x) = c * c * x$ предложены характеристические уравнения гиперболического типа. На их основе составлено характеристическое уравнение для общей функции $y(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 * x_2 * \dots * x_n$, при решении которого следует выбирать крайний правый вещественный корень. Предложено циклическое расширение замыкания вещественной оси путем периодического повторения интервала $[-\infty; \infty]$ в положительном и отрицательном направлениях, при котором достигается совпадение областей определения и значений для упомянутой функции$y(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Описан алгоритм поиска крайнего правого решения характеристического уравнения; приведены некоторые результаты вычислений по этому алгоритму. В заключение сформулированы задачи и цели последующей работы.

1. Обзор литературы

Вопрос о возможности расширения известного набора арифметических операций рассматривался ранее в работах К.А. Рубцова, К.А. Рубцова и Дж. Ромерио[1], Б.К. Расплетина и А.А. Каменщикова[2] на примере операции, в определенном значении предшествующей сложению. В этих работах был предложен алгоритм вычислений, имеющий следующее свойство: результат вычислений не является непрерывной и гладкой функцией операндов. В настоящей статье предлагается конструктивный способ определения этой операции, позволяющий построить алгоритм вычислений, исключающий указанную разрывность значений.

2. Основные определения

Определение 1. Назовем ***набиранием*** такую операцию*, для которой при всех $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$справедливы равенства

$a_1 * a_2 = a + 2,$

$a_1 * a_2 * a_3 = a + 3,$

$\ldots,$

$$a_1 * \ldots * a_n = a + n. \qquad (1)$$

Согласно этому определению, в действительности вводится счетное бесконечное множество аналогичных операций $O = \{*_1, *_2, \ldots, *_n, \ldots\}$, арности которых, показанные нижними индексами, составляют все множество натуральных чисел: $n \in \mathbb{N}$.

Случаю одного операнда соответствует унарная операция

$$*_1\, a = a + 1. \qquad (2)$$

Далее любая из операций, входящих в это множество, называется одним родовым термином «набирание».

Операнды называются ***набираемыми***, результат набирания называется ***набором***.

Для набирания также применяется второе обозначение:

$$a_1 * \ldots * a_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$$
$$* a = \{a\} \qquad (3)$$

3. Основные требования к набиранию

В этом разделе формулируется ряд основных требований, которым должно удовлетворять набирание.

3.1 Применимость набирания к различным операндам

По определению полагается, что для любых вещественных чисел выражения вида

$a_1 * a_2,$

$a_1 * a_2 * a_3,$

$\ldots,$

$a_1 * \ldots * a_n$

имеют смысл и числовое значение при любых вещественных $a_1, \ldots, a_n$ и натуральных n.

3.2 Непрерывность результата набирания

По определению полагается, что числовое значение набора является непрерывной и гладкой функцией от каждого из операндов, за исключением, может быть, конечного числа особых точек:

$$\begin{cases} x_1 * \ldots * x_i * \ldots * x_n \to x_1 * \ldots * a_i * \ldots * x_n \pm 0 \text{ при } x_i \to a_i \pm 0 \\ \left|\frac{\partial}{\partial x_i}(x_1 * \ldots * x_i * \ldots * x_n)\right| < \infty \end{cases}$$

при $\forall(a_i, x_i \in \mathbb{R},\ i, n \in \mathbb{N})$.

3.3 Коммутативность набирания

Операция набирания полагается коммутативной:

$$a * b = b * a$$

$$a_1 * \ldots * a_n = a_{i_1} * \ldots * a_{i_n} \tag{4}$$

при всех n и всех $i_k, k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i_p \neq i_q\ \forall(i_p, i_q, k, n, p, q \in \mathbb{N})$, т.е. при всех возможных перестановках нижних индексов i_k.

3.4 Отношения равенства и неравенства для наборов

В дополнение к требованиям применимости, непрерывности и коммутативности вводятся следующие равенства и неравенства:

1) неравенства:

$$a_1 < a_2 \Leftrightarrow * a_1 <* a_2$$

$$a_1 < a_2 \Leftrightarrow a_1 * b_1 < a_2 * b_1$$

$$a_1 < a_2 \Leftrightarrow a_1 * b_1 * b_2 < a_2 * b_1 * b_2$$

…

$$a_1 < a_2 \Leftrightarrow a_1 * b_1 * b_2 * \ldots * b_n < a_2 * b_1 * b_2 * \ldots * b_n$$

$$\left.\begin{matrix} a_1 < c_1 \\ a_2 < c_2 \\ \ldots \\ a_m < c_m \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow a_1 * \ldots * a_m * b_1 * \ldots * b_n < c_1 * \ldots * c_m * b_1 * \ldots * b_n \tag{5}$$

Эти неравенства являются необходимыми, но не достаточными условиями выполнения свойства непрерывности набирания.

Равенства могут быть получены из приведенных неравенств путем замены знака <на =.

3.5 Неассоциативность набирания

Предположим, что $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ для всех натуральных n.

Если дано mn одинаковых набираемых, то их набор равен

$\{a_1, \dots, a_{mn}\} = a + mn.$ (6)

Если набираемые числа объединить вmгрупп, по n элементов в каждой, то набор будет равен

$\{\{a_1, \dots, a_n\}_1, \dots, \{a_1, \dots, a_n\}_m\} = (a + n) + m \neq a + mn.$ (7)

Если дано $p = m + n$ операндов, $2 < m < n$, то результат набирания равен $a + p = a + m + n$. При разделении операндов на две группы, в которых m и n элементов, соответственно, получим следующие неравенства:

$$\{\{a_1, \dots, a_m\}_1, \{a_1, \dots, a_n\}_2\} = (a + m) * (a + n) < (a + n) * (a + n) = a + \\ + n + 2 < a + m + n. \quad (8)$$

Таким образом, в случае равных операндов набирание неассоциативно. Это свойство априорно обобщается на случай различных операндов.

3.6 Дистрибутивность сложения по набиранию

Предположим, что $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ для всех натуральных n. В этом случае дистрибутивность сложения по набиранию следует из следующей цепочки равенств:

$$a_1 * \dots * a_N = a + N = \big((a + b) + N\big) - b = ((a + b)_1 * \dots * (a + b)_N) - \\ - b \Rightarrow b + (a_1 * \dots * a_N) = (a + b)_1 * \dots * (a + b)_N. \quad (9)$$

Введем требование справедливости этого равенства и для случая неравных операндов $a_1, a_2, \dots, a_n$ при всех натуральных n.

4. Дополнительные свойства набирания

4.1 Идемпотенты по набиранию

Рассмотрим неравенство:

$$a * a = a + 2 > a + 1$$

Из него следует, что верны следующие импликации:

$$a \to \infty \Longrightarrow a * a \to \infty$$
$$a \to -\infty \Longrightarrow a * a \to -\infty \quad (10)$$

Аналогичные равенства справедливы при любом количестве операндов в наборе:

$$a_1 * \dots * a_n = a + n \to \pm\infty \quad (11)$$

при условиях

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a,$$
$$a \to \pm\infty \tag{12}$$

при любом конечном натуральном n.

Следовательно, предельные точки $+\infty$ и $-\infty$ являются идемпотентами для набирания.

4.2 Предельные значения набора двух чисел

Рассмотрим вспомогательный пример. При условии $a < b$, согласно п. 3.4, справедливы следующие неравенства:

$$a * a = a + 2 < a * b < b * b = b + 2$$
$$a * b = a + \big(0 * (b - a)\big)$$

При обозначении $c = b - a > 0$ из второй строки следует, что

$$a + (0 * c) > a + (* c) = a + c + 1 = a + b - a + 1 = b + 1$$

Но при$a > b$ верно другое неравенство:

$$a * b = b + \big(0 * (a - b)\big) > a + 1$$

Учитывая неравенства п. 3.4, запишем следующие предельные отношения:

$$\begin{cases} a * b \to a + 1 + 0 \text{ при } a \to \infty \\ a * b \to b + 1 + 0 \text{ при } a \to -\infty \end{cases} \tag{13}$$

5. Свойства идемпотентов

5.1 Базовый элемент

Из второго соотношения (13) п. 3 следует, что предельная точка $U = -\infty$ является для набирания элементом с особенными свойствами:

$$* a = U * a = U * U * a = U_{(1)} * \ldots * U_{(N)} * a$$
$$a * a = U * a * a = U * U * a * a = U_{(1)} * \ldots * U_{(N)} * a * a$$
$$a * \ldots * a_M = U * a * \ldots * a_M = U_{(1)} * \ldots * U_{(N)} * a_{(1)} * \ldots * a_{(M)}. \tag{14}$$

Согласно этим постулируемым равенствам, добавление любого количества одинаковых элементов U к множеству операндов не изменяет значения набора. В том числе, это справедливо и при подстановке в равенства (14) $a = U$, т.е. элемент U обладает свойствами идемпотента.

Назовем такой элемент ***базовым***.

Определение 2. ***Базовым относительно операции*** $*$ называется элемент U, обадающий свойствами (14) и одновременно не являющийся нейтральным.

5.2 Новое определение операции набирания

Существование базового элемента и его свойства позволяют по-новому сформулировать определение самой операции. А именно, рассмотрим бесконечные вещественные последовательности

$\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots)$.

Сопоставим каждой из них вещественное число

$$\bar{a} \to y(\bar{a}) = \{a_1, a_2, \ldots\} \tag{15}$$

Фигурные скобки используются здесь в значении, определенном выше. А именно,

$$\exists n, a_i (n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}) \colon \forall i, j, k (i > n;\ j, k \leq n) a_i = U \ \wedge \ a_j = a_k \Rightarrow \ y = a + n \tag{16}$$

Определение 3. Операцией набирания называется такое отображение вида (15), которое обладает свойством (16), где использовано обозначение $U \equiv -\infty$.

Следствие 3.1. Если в Определении 3 заменить в правой части выражения (16) элемент U на 0, а сложение на умножение:

$$\exists n, a_i (n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}) \colon \forall i, j, k (i > n;\ j, k \leq n) a_i = U \ \wedge \ a_j = a_k \Rightarrow \ y = an, \tag{17}$$

то получим определение операции сложения. Следовательно, нейтральный элемент по сложению является одновременно базовым.

Следствие 3.2. Если в Определении 3 заменить в правой части выражения (16) элемент U на 1, а сложение на возведение в степень:

$$\exists n, a_i (n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}) \colon \forall i, j, k (i > n;\ j, k \leq n) a_i = U \ \wedge \ a_j = a_k \Rightarrow \ y = a^n, \tag{18}$$

то получим определение операции умножения. Следовательно, нейтральный элемент по умножению является одновременно базовым.

5.3 Отсутствие нейтрального элемента для набирания

Отсутствие нейтрального элемента по набиранию ν следует из требования непротиворечивости системы равенств:

$$\begin{cases} U * \nu = \nu + 1 \\ U * \nu = U \\ U * a = a + 1 \\ \nu * a = a \end{cases} \tag{19}$$

Из этой системы следует, что

$$\begin{cases} U = \nu + 1 \\ U \neq \nu \end{cases}.$$

Поэтому для операции набирания нейтрального элемента не существует.

5.4 Экспоненциальные выражения для базовых элементов операций $*, +, \cdot$

Поскольку определяющее свойство (1) набирания ставит его в такое же отношение к сложению, в каком сложение находится к умножению, а умножение – к возведению в степень, то рассмотрим эту формальную аналогию более подробно с точки зрения базовых элементов.

Во-первых, согласно следствиям 3.1, 3.2, имеем формально аналогичные равенства при всех $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$:

$$\begin{aligned} &a_1 * \ldots * a_n = a + n \\ &a_1 + \cdots + a_n = a \cdot n \\ &a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = a^n \end{aligned} \tag{20}$$

Далее, существуют такие элементы $1, 0, U$, что

$$\begin{aligned} &U * \ldots * U = U + n = U \\ &0 + \cdots + 0 = 0 \cdot n = 0 \\ &1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1^n = 1 \end{aligned} \tag{21}$$

Наконец, справедливы следующие предельные экспоненциальные отношения:

$$\begin{aligned} &a^x \to a + 0 \text{ при } x \to 1 + 0 \\ &a^{a^x} \to a + 0 \text{ при } x \to 0 + 0 \\ &a^{a^{a^x}} \to a + 0 \text{ при } x \to U + 0 \end{aligned} \tag{22}$$

6. Набирание двух разных чисел

В п. 3 установлены следующие предельные отношения:

$$\begin{cases} a * b \to a + 1 + 0 \text{ при } a \to \infty \\ a * b \to b + 1 + 0 \text{ при } a \to -\infty \end{cases} \tag{13}$$

Кроме того, по определению (1)

$a * a = a + 2 = \{a, a\}$.

Рассмотрим ***плоскую задачу***, т.е. функцию $y(x) = c * x$, где $c = const$. Общий вид графика этой функции представлен на рис. 1.

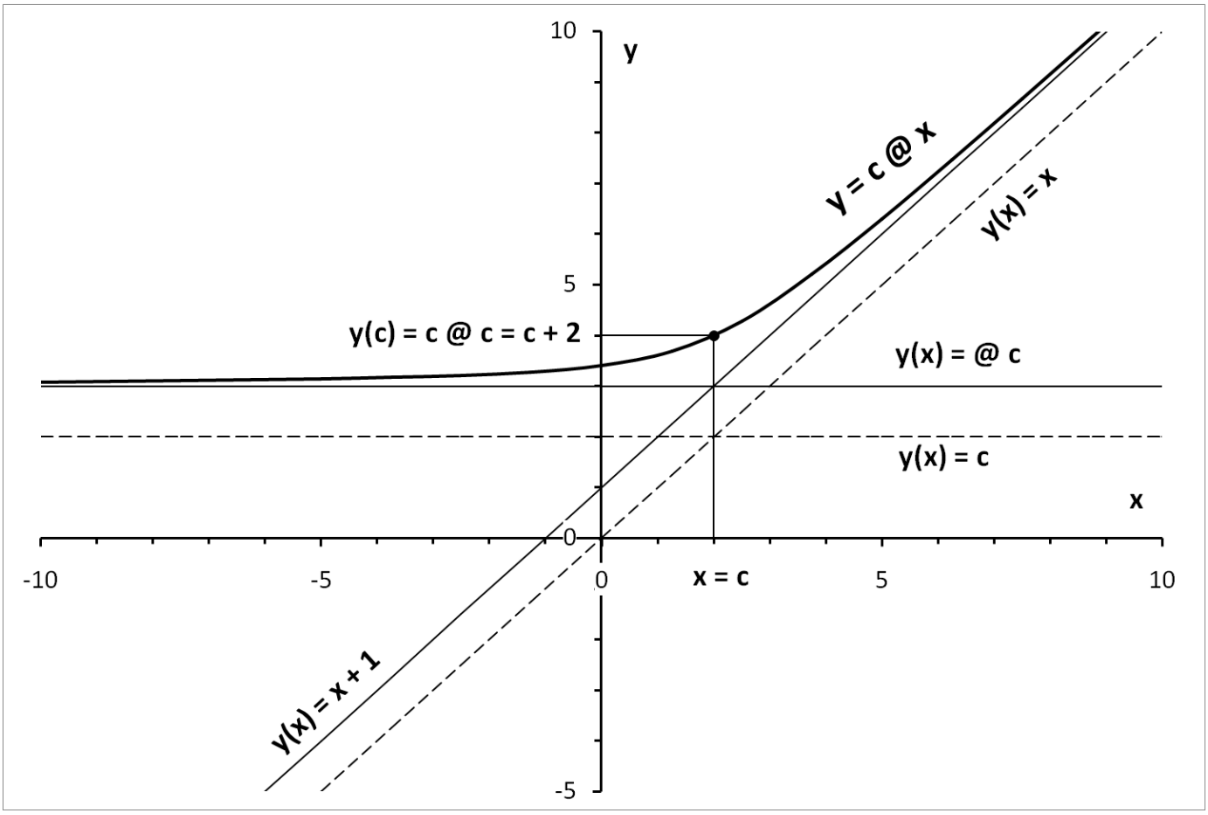

Рис. 1. График функции $y(x) = c * x$, где $c = 2 = const$

График построен с соблюдением свойств набирания, определенных в пп. 2-3. Этому графику соответствует, в том числе, уравнение

$$(y - c - 1)(y - x - 1) = 1, \tag{24}$$

при решении которого следует выбирать максимальное положительное решение y_{max} , для которого $y_{max} > x + 1$ и $y_{max} > c + 1$.

Единица, стоящая в правой части уравнения (19), выбрана на основании геометрического смысла графика и того, что

$$y(c) = c * c = c + 2,$$

$$y(U) = c * U = c + 1.$$

Указанное решение y_{max} удовлетворяет свойствам набирания, установленным и введенным в пп. 2-3. В самом деле, при$x = c$ искомое решение равно $y = c + 2$, в чем можно убедиться прямой подстановкой.

Коммутативность очевидна из равенства

$$(y - c - 1)(y - x - 1) = (y - x - 1)(y - c - 1).$$

Дистрибутивность сложения по набиранию следует из равенства

$$(y - c - 1)(y - x - 1) = \big((y + a) - (c + a) - 1\big)\big((y + a) - (x + a) - 1\big).$$

Свойство идемпотентности величин U и ∞ следует из того наблюдения, что при фиксированном c в уравнении справедливы предельные соотношения:

$$x \to U \Rightarrow y - x - 1 \to \infty \Rightarrow y - c - 1 \to 0 + 0 \Rightarrow y \to c + 1 + 0,$$

$$x \to \infty \Rightarrow y - x - 1 \to 0 \Rightarrow y - c - 1 \to \infty, y \to x + 1 + 0 \tag{25}$$

Выбор второго (меньшего) решения уравнения (19) допускается при специальных условиях, о которых будет сказано позднее.

7. Набирание многих разных чисел. Характеристическое уравнение

Перейдем к более общему***многомерному случаю*** функции $y(x) = c_1 * \ldots * c_n * x$, где $c_1, \ldots, c_n = const$.

Эскиз графика этой функции, с учетом уже установленных свойств набирания, приведен на рис. 2.

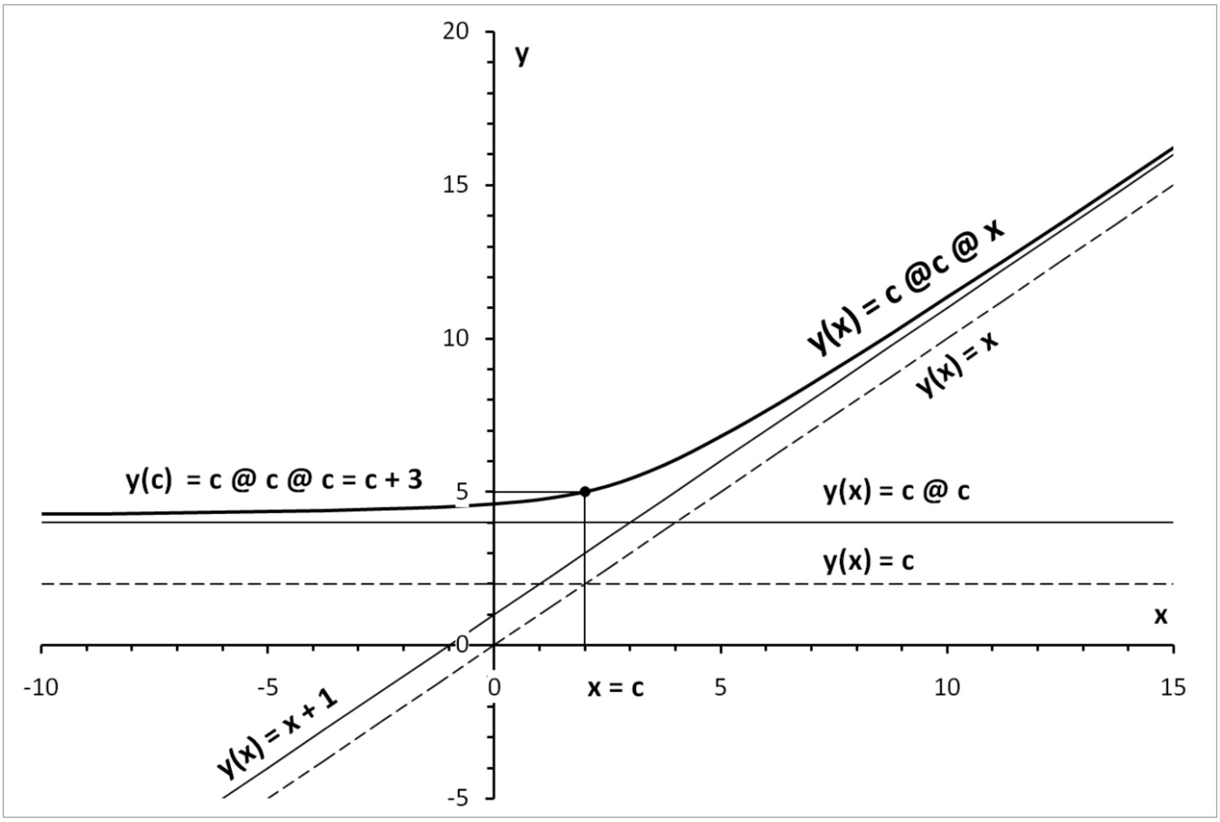

Рис. 2. График функции $y(x) = c_1 * \ldots * c_n * x$, где $c_1, \ldots, c_n = 2 = const$

Представленный график построен для случая $c_1 = \cdots = c_n = 2$, $n = 2$. Независимо от этого допущения, графику многомерной задачи соответствует уравнение

$$(y - C)(y - x - 1) = n - 1, \quad (26)$$

где $C = c_1 * \ldots * c_n$.

Величина $n - 1$ в правой части уравнения видна из графика и обусловлена равенством

$$(c_1 * \ldots * c_n) - (* x) = c + n - (c + 1) = n - 1 \quad (27)$$

при $x = c_1 = \cdots = c_n = c$.

Применимость этого уравнения для случая $c_1 \neq \cdots \neq c_n$ принимается априорно. Вопрос о правой части отдельно рассматривается в другом разделе этой статьи.

Используя вторую допустимую запись набора согласно (3)

$a_1 * \ldots * a_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$,

преобразуем частное характеристическое уравнение (20) к виду

$$(y - \{c_1, \ldots, c_n\})(y - \{x\}) = n - 1. \qquad (28)$$

Данное уравнение описывает график рассматриваемой функции одной переменной, однако в наборе $c_1 * \ldots * c_n * x$ любая из набираемых величин может рассматриваться в качестве переменной. Однако при фиксировании значения x и варьировании какой-либо из величин $c_1, \ldots, c_n$ структура характеристического уравнения должна остаться прежней, вследствие коммутативности набирания. Чтобы обеспечить это требование,постулируем общее характеристическое уравнение в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^{n}(y - r_i)(y - \{c_i\}) = (n-1)^n, \qquad (29)$$

где

$$\begin{cases} y = \{c_1, \ldots, c_n\}, \\ r_i = \{c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_n\} \text{ при всех } j \neq i. \end{cases} \qquad (30)$$

Определение 4. Для набора $\{c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_n\}$ величина $r_i = \{c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_n\}$ при всех $j \neq i$ называется ***остатком*** набора ***по элементу***c_i.

Определение 5. Для набора $y = \{c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_n\}$ его ***характеристическим уравнением*** называется уравнение

$$\prod_{i=1}^{n}(y - r_i)(y - \{c_i\}) = (n-1)^n.$$

Решение характеристического уравнения ищется следующим образом.

1) Вычисляются значения наборов, составленных из отдельных элементов исходного набора: $\{c_1\}, \{c_2\}, \{c_3\}, \ldots$ Полученные промежуточные результаты называются ***решениями 1-го эшелона***.
2) С использованием только решений первого эшелона вычисляются наборы пар несовпадающих величин: $\{c_1, c_2\}, \{c_1, c_3\}, \{c_1, c_4\}, \ldots, \{c_2, c_3\}, \ldots$ Т.о. получены ***решения 2-го эшелона***.
3) Процедура использования решений промежуточных эшелонов приводит к получению единственного решения **последнего**-го **эшелона**.

Для проверки представленных допущений составлен алгоритм решения общего характеристического уравнения и на языке программирования

VBAнаписана реализующая его компьютерная программа, оформленная в виде пользовательской функции MSOfficeExcel, которая вычисляет значение набора заданных чисел. Например, на рис. 3 показан график функции

$$y(x) = (-30 - x) \mathbin{@} 0 \mathbin{@} x \mathbin{@} (2x - 30), \qquad (31)$$

вычисленный с помощью написанной компьютерной программы.

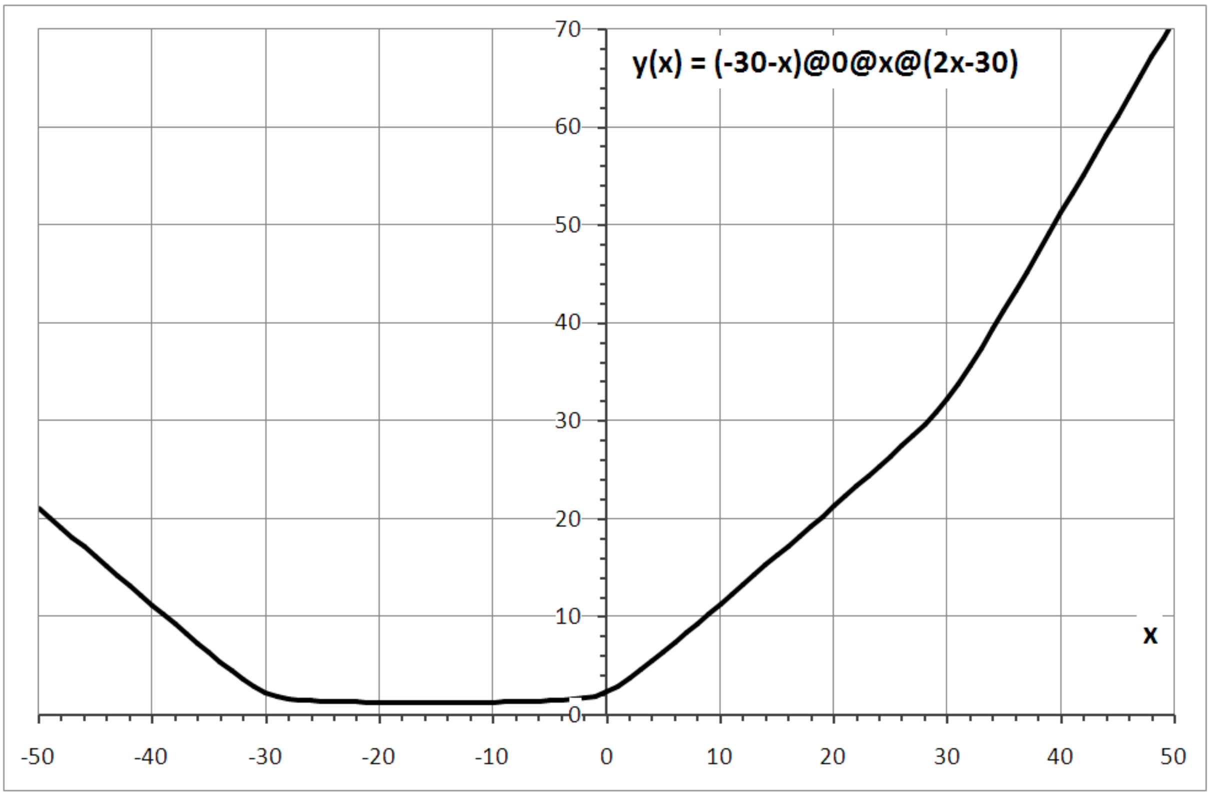

Рис. 3. Графики функции $y(x) = (-30 - x) \mathbin{@} 0 \mathbin{@} x \mathbin{@} (2x - 30)$

На рис. 4 приведены графики кривых 1, 2, 3, описываемых уравнениями

$$\begin{cases} x \mathbin{@} y = 4 \\ x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases}$$

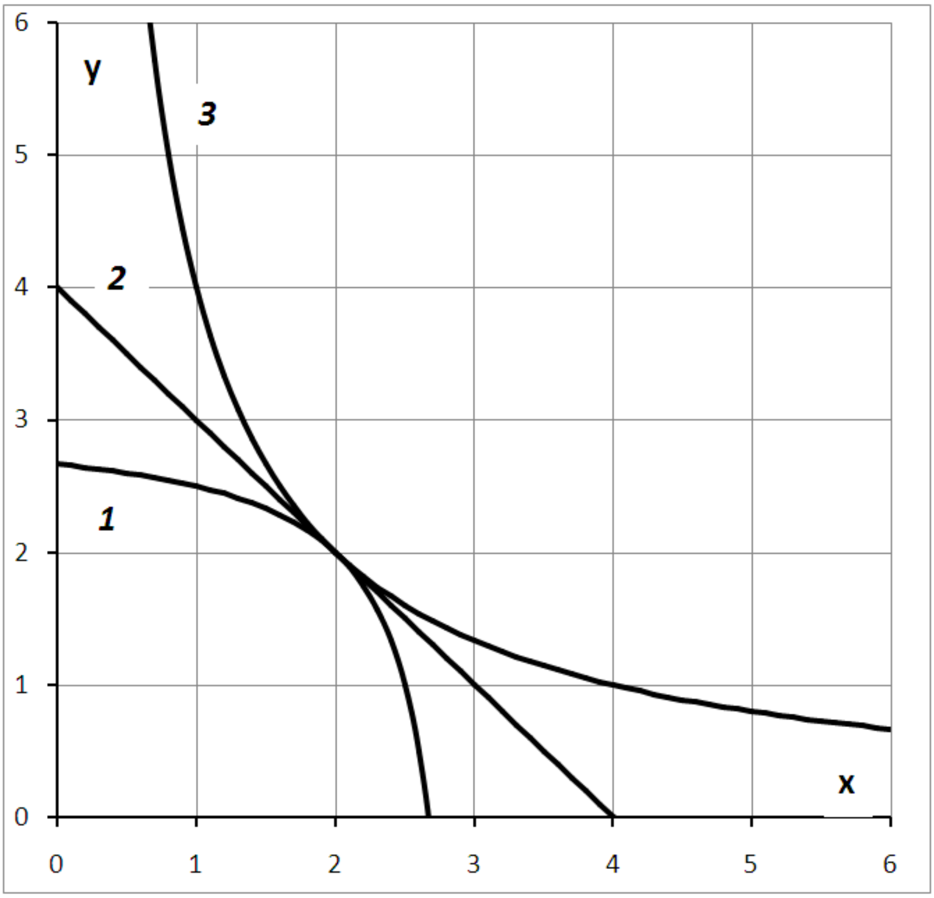

Рис. 4. Графики кривых: 1)$x\ @\ y = 4$; 2)$x + y = 4$; 3)$xy = 4$

Некоторые результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты набирания двух чисел

@	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	2	2,61803	3,41421	4,30278	5,23607	6,19258
1	2,61803	3	3,61803	4,41421	5,30278	6,23607
2	3,41421	3,61803	4	4,61803	5,41421	6,30278
3	4,30278	4,41421	4,61803	5	5,61803	6,41421
4	5,23607	5,30278	5,41421	5,61803	6	6,61803
5	6,19258	6,23607	6,30278	6,41421	6,61803	7

8. Расширение области применимости набирания

8.1 Задача о расширении набирания на комплексную плоскость

Расширение области применимостинабирания на комплексную плоскостьтребуетотдельного исследования. Основную трудность вызывает структура правой части характеристического уравнения, поскольку она была выбрана, во-первых, при рассмотрении вещественной задачи и, во-вторых, на основе частного случая (равенство всех элементов набора, за исключением переменного).

Укажем возможность более общего определения правой части характеристического уравнения.

Запишем характеристическое уравнение набора $y = \{c_1, \dots, c_i, \dots, c_n\}$:

$$\prod_{i=1}^{n}(y - r_i)(y - \{c_i\}) = (n-1)^n. \tag{29}$$

Пусть элемент c_i – переменный и принимает значение $c_i = r_i - 1$. Введем следующие обозначения: $b_i = r_i - 1$ – ***центральный элемент*** набора, $a_i = \{c_1, \dots, b_i, \dots, c_n\}$ – ***центрированный*** набор. Отметим, что остаток s_i центрированного набора по элементу b_i (с номером i), очевидно, совпадает с остатком r_i исходного набора. Также отметим, что центральный элемент набора превосходит его «среднее» (по этой операции)от остатка r_i, равное

$$r_i - n$$

Используя все центрированные наборы (по всем элементам поочередно), можно записать следующее характеристическое уравнение:

$$\prod_{i=1}^{n}(y - r_i)(y - \{c_i\}) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - r_i)(a_i - \{b_i\}) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - r_i)^2 \tag{32}$$

Согласно этому уравнению, чтобы найти его решение – значение исходного набора $y = \{c_1, \dots, c_i, \dots, c_n\}$, – вначале необходимо найти значения n центрированных наборов по элементам $i = 1, \dots, n.$ Т. о., исходная задача порождает n вспомогательных задач. Запишем характеристическое уравнение для одной (i-ой) из них:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(a_i - s_{ij}\right)\left(a_i - \{d_{ij}\}\right) = \prod_{k=1}^{n}(\alpha_{ik} - s_{ik})^2 \tag{33}$$

Здесь s_{ij} – общее обозначение остатка центрированного набора a_i, d_{ij} – обобщенное обозначение элементов этого набора, а α_{ik} – обозначение центрированного остатка, определенного по центрированному набору a_i. Замечаем, что при$j = k = i$ соответствующие множители совпадают:

$$(a_i - s_{ii})(a_i - \{d_{ii}\}) = (\alpha_{ii} - s_{ii})^2$$

$$(a_i - s_{ii})(a_i - \{d_{ii}\}) = (a_i - r_i)(a_i - \{b_i\}) = (a_i - r_i)^2$$

$$(\alpha_{ii} - s_{ii})^2 = (a_i - r_i)^2 \tag{34}$$

Однако остальные $n-1$ наборов α_{ik}, $k \neq i$, остаются неизвестными. Т. о., каждая вспомогательная задача порождает еще $n-1$ вспомогательных задач той же размерности (с тем же числом набираемых). Поскольку центральный элемент всегда превосходит «среднее наборное» остатка, и это верно для всех центрированных наборов, то значения, входящие в правые части, неограниченно возрастают при переходе к вспомогательным задачам дальнейших «поколений». Т.о., значение правой части исходного уравнения следует определять на основе предельных переходов.

Этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

8.2 Расширение вещественной числовой оси

Рассмотрим характеристическое уравнение для случая двух дов$y(x) = c \,@\, x$.

$$(y - \{c\})(y - \{x\}) = 1. \tag{24}$$

Раскроем скобки в этом уравнении:

$$y^2 - (\{c\} + \{x\})y + \{c\}\{x\} - 1 = 0 \tag{35}$$

Оно имеет дискриминант

$$D = (\{c\} + \{x\})^2 - 4\{c\}\{x\} + 4 = \{c\}^2 + \{x\}^2 + 2\{c\}\{x\} - 4\{c\}\{x\} + 4 =$$
$$= \{c\}^2 + \{x\}^2 - 2\{c\}\{x\} + 4 = (\{c\} - \{x\})^2 \tag{36}$$

и решения равны

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}(-(\{c\} + \{x\}) \pm |\{c\} - \{x\}|) = \frac{1}{2}(-(\{c\} + \{x\}) \pm |\{c\} - \{x\}|) \tag{37}$$

Эти два решения лежат на числовой оси слева и справа от точек $\{c\}$ и $\{x\}$.

Теперь сравним асимптотическое поведение «левого» решенияy_1 при $x \to \infty$ и «правого» решенияy_2 при $x \to U$. Из предельных соотношений (13), (19) п. 4 видно, что при $x \to \infty$«левое» решение стремится к точке $y_1 = c + 1$слева, а «правое» решение стремится к ней справа при $x \to U$:

$$\begin{cases} y_1 \to c + 1 - 0, & x \to \infty \\ y_2 \to c + 1 + 0, & x \to U \end{cases}$$

Таким образом, в точке $y_1 = c + 1$одновременно происходят два перехода: от «правого» решения к «левому» и от предельной точки $x \to U$ к точке $x \to \infty$. Чтобы сохранить непрерывность функции $y(x)$ при любых изменениях ее аргумента, рассмотрим циклическоепродолжениезамкнутой вещественной оси, т.е.

отрезка$[-\infty;\ \infty]$, в обе стороны за предельные точки $-\infty$ и ∞, как показано на рис. 6.

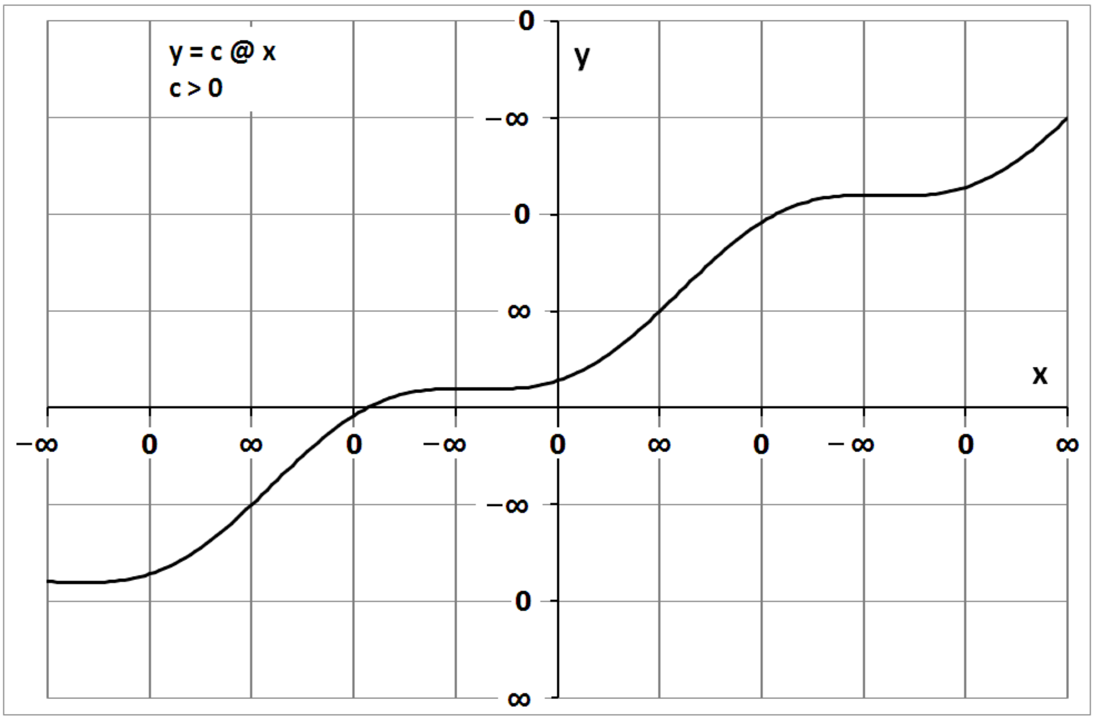

Рис. 6. График функции $y(x) = c * x$ при циклическом расширении числовой оси

Для определения связи между предельными точками циклов рассмотрим два уравнения:

$$y^2 - (\{c\} + \{x\})y + \{c\}\{x\} - 1 = 0 \quad (38)$$

$$\bar{y}^2 - (-\{c\} - \{x\})\bar{y} + \{c\}\{x\} - 1 = 0 \quad (39)$$

Второе из них получено из первого путем смены знака при точках $\{x\}$ и $\{c\}$.

Левостороннее решение уравнения(38) и правостороннее – уравнения (39) равны, соответственно,

$$y_1 = \frac{1}{2}(-(\{c\} + \{x\}) + |\{c\} - \{x\}|) \quad (40)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2}(-(-\{c\} - \{x\}) - |-\{c\} + \{x\}|) = -\frac{1}{2}(-(\{c\} + \{x\}) + |\{x\} - \{c\}|) \quad (41)$$

Таким образом,

$\bar{y}_2 = -y_1$.

С другой стороны, поскольку

$\{c\} = c + 1$,

$\{x\} = x + 1$,

$\{-c - 2\} = -c - 2 + 1 = -c - 1 = -\{c\}$,

$\{-x - 2\} = -x - 2 + 1 = -x - 1 = -\{x\}$, (42) то смена знака у величин $\{c\}$ и $\{x\}$ соответствует переходу к числам $-c-2$ и $-x-2$.

Таким образом,

$$y_2(-x-2;\ -c-2) = -y_1(x;c). \tag{43}$$

Каждой точке x' в пределах каждого цикла соответствует точка x, лежащая в основном цикле – на вещественной оси.

Естественно ввести целочисленную нумерацию этих циклов с помощью чисел$k \in \mathbb{Z}$ и обобщенное обозначение точек в них в виде $x_{\underline{k}} = \langle x,\ k\rangle$. Второй элемент в скобках является номером цикла, в пределах которого расположена данная точка. Исходному циклу $[-\infty;\ \infty]$ присвоим номер $k=0$. Введем для таких точек расширенной вещественной оси операцию взятия модуля, смысл которой будет заключаться в переходе от текущего периода к основному: по определению

$$|x_{\underline{k}}| = x_{\underline{0}} = x. \tag{44}$$

Также обозначим длину интервала $]-\infty;\ \infty[$через$\Pi = |]-\infty;\ \infty[|$.

Легко проверить прямой подстановкой, что алгебраическая запись вида$x_{\underline{k}} =$ да $x_{\underline{k}} = x + k\Pi$ не обеспечивает периодичности решения характеристического уравнения. В самом деле, например:

$$\begin{aligned} c * x = c * (x + k\Pi) = \big((c - x - (k-1)\Pi) * \Pi\big) + x + (k-1)\Pi = \\ = \big(*\,(c - x - (k-1)\Pi)\big) + x + (k-1)\Pi = c - x - (k-1)\Pi + 1 + \\ + x + (k-1)\Pi = c + 1, \end{aligned} \tag{48}$$

что равно значению функции $y(x = \pm\Pi)$. Следовательно, для чисел вида $x_{\underline{k}} = \langle x,\ k\rangle$ должны быть специально определены алгебраические операции.

При дальнейшем рассмотрении левостороннего и правостороннего корней характеристического уравнения (18) при значениях аргумента $x_{\underline{k}}, k \neq 0$, замечаем, что значение функции изменяется с периодом, равным ∞, когда ее аргумент проходит точки, отстоящие друг от друга с периодом 2∞.

Обобщим результаты, полученные в этом разделе. Как следует из свойств идемпотентов операции *, уравнение

$$y = c *\ x$$

имеет смысл только при условии

$$y > max(x, c) + 1.$$

Но при рассмотренном циклическом расширении числовой оси это уравнение может быть решено при любых отношениях неравенства между переменными.

В том случае, если поставлено условие

$$y < max(x, c) + 1,$$

следует искать решение xв циклах, расположенных слева от основного.

9. Выводы и рекомендации

В данной работе построена новая числовая операция набирания.

1) сформулирован ряд основных требований к ее свойствам, аналогичных с основными арифметическими операциями сложения и умножения;
2) выявлено наличие двух идемпотентов, лежащих в окрестностях точек замыкания числовой оси, и кратко рассмотрены свойства данной операции в этих окрестностях;
3) составлено общее характеристическое алгебраическое уравнение гиперболического типа, решение которого, имеющее максимальную вещественную часть и нулевую мнимую, является числовым значением соответствующего набора;
4) на основании поведения результата набора в окрестностях точек замыкания числовой оси предложено ее циклическое расширение с условным периодом $\Pi = 2\infty$; полученное расширение множества вещественных чисел замкнуто относительно операции набирания;
5) написана компьютерная программа для прикладного использования данной операции; приведены некоторые результаты вычислений.

Дальнейшую работу следует вести, в том числе, в следующих направлениях:

- расширение рассмотренной операции на комплексную плоскость;
- строгое обоснование циклического расширения вещественной оси и уточнение его свойств;
- поиск других способов построения характеристического уравнения и их сравнение с приведенным.

10. Список литературы

1. РасплетинБ.К., КаменщиковА.А. Обратныеарифметическиеоперации. // International Journal of Open Information Technologies ISSN: 2307-8162 vol. 4, no. 6, 2016

2. Tetration Forum: Zeration. –
http://math.eretrandre.org/tetrationforum/showthread.php?tid=122